

MỤC LỤC

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮC	i
DANH MỤC HÌNH ẢNH.....	ii
DANH SÁCH CÁC BẢNG.....	v
LỜI GIỚI THIỆU	vi
CHƯƠNG 1. QUAN HỆ	1
1.1. Quan hệ hai ngôi và các tính chất	1
1.1.1. Định nghĩa và các ví dụ	1
1.1.2. Các phép toán trên tập các quan hệ	2
1.1.2.1. Phép hợp	2
1.1.2.2. Phép giao	2
1.1.2.3. Phép hiệu	3
1.1.2.4. Phép hợp thành	3
1.1.3. Các tính chất của quan hệ hai ngôi	4
1.1.4. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự	6
1.1.4.1. Quan hệ tương đương	6
1.1.4.2. Quan hệ thứ tự	6
1.2. Biểu diễn quan hệ	6
1.2.1. Biểu diễn bằng ma trận 0 - 1	7
1.2.2. Các tính chất, phép toán của quan hệ biểu diễn bằng ma trận	9
1.2.3. Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị có hướng	10
1.3. Bao đóng của quan hệ	12
1.3.1. Định nghĩa bao đóng quan hệ	13
1.3.2. Thuật toán xác định bao đóng bắc cầu	14
1.3.2.1. Thuật toán 1	14
1.3.2.2. Thuật toán Warshall	15
1.4. Quan hệ n ngôi và ứng dụng	17
1.4.1. Định nghĩa quan hệ n ngôi	18
1.4.2. Cơ sở dữ liệu và các quan hệ	18
1.5. Bài tập	20
CHƯƠNG 2. LÝ THUYẾT TỔ HỢP	22
2.1. Một số nguyên lý đếm cơ bản	22
2.1.1. Nguyên lý cộng	22
2.1.2. Nguyên lý nhân	24
2.1.3. Nguyên lý bù trừ	25
2.1.4. Nguyên lý quy nạp	28
2.1.4.1. Các bước chứng minh quy nạp	28
2.1.4.2. Các ví dụ về cách chứng minh theo quy nạp toán học	29

2.1.5. Nguyên lý Dirichlet (Chuồng chim)	30
2.2. Đếm các hoán vị tổ hợp	30
2.2.1. Hoán vị	30
2.2.2. Chính hợp	31
2.2.3. Tổ hợp	32
2.3. Hệ thức truy hồi	33
2.3.1. Giới thiệu hệ thức truy hồi	33
2.3.2. Giải hệ thức truy hồi thuần nhất tuyến tính hệ số hằng số	34
2.4. Các bài toán liệt kê	36
2.4.1. Phương pháp quay lui (đệ quy)	36
2.4.1.1. Nguyên lý chung	36
2.4.1.2. Liệt kê chính hợp lặp	38
2.4.1.3. Liệt kê chính hợp không lặp	38
2.4.1.4. Liệt kê tổ hợp	39
2.5. Bài tập	39
CHƯƠNG 3. ĐỒ THỊ	44
3.1. Các khái niệm	44
3.1.1. Đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng	44
3.1.2. Các mô hình ứng dụng của đồ thị	46
3.1.2.1. Đồ thị lấn tổ (Niche Overlap) trong sinh thái học	46
3.1.2.2. Đồ thị quen biết	46
3.1.2.3. Đồ thị ảnh hưởng	46
3.1.3. Các đơn đồ thị đặc biệt	47
3.1.3.1. Đồ thị đầy đủ	47
3.1.3.2. Đồ thị vòng	47
3.1.3.3. Đồ thị phân đôi	47
3.1.3.4. Đồ thị phẳng	48
3.2. Biểu diễn đồ thị	48
3.2.1. Biểu diễn bằng danh sách	48
3.2.2.1. Ma trận kề	50
3.2.2.2. Ma trận liên thuộc	51
3.3. Đường đi trong đồ thị	52
3.3.1. Đường đi, chu trình, tính liên thông	52
3.3.2. Thuật toán tìm chu trình Euler	54
3.3.3. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất	55
3.3.3.1. Phát biểu bài toán	55
3.3.3.2. Thuật toán Dijkstra	55
3.3.3.3. Thuật toán Floyd	60
3.4. Bài toán tô màu đồ thị	63

3.4.1. Tô màu đồ thị	63
3.4.2. Thuật toán tuần tự ưu tiên đỉnh bậc lớn nhất	65
3.4.3. Một số bài toán ứng dụng	67
3.4.3.1. Bài toán điều khiển đèn hiệu nút giao thông	67
3.4.3.2. Bài toán lập lịch thi	68
3.5. Cây khung và các thuật toán liên quan	69
3.5.1. Khái niệm cơ bản	69
3.5.2. Tính chất	70
3.5.2. Thuật toán tìm cây khung nhỏ nhất	71
3.5.2.1. Thuật toán Prim	72
3.5.2.2. Thuật toán Kruskal	74
3.6. Bài tập	77
CHƯƠNG 4. ĐẠI SỐ BOOLE	82
4.1. Đại số Boole	82
4.2. Các khái niệm	82
4.3. Mạch Logic	84
4.4. Cực tiểu hóa các mạch	85
4.4.1. Cực tiểu hóa bằng bảng bản đồ Karnaugh	85
4.4.2. Phương pháp Quine - Mc Cluskey	88
4.5. Bài tập	92
TÀI LIỆU THAM KHẢO	94

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮC

Stt	Từ viết tắt	Từ cụ thể
1	đpcm	Điều phải chứng minh

DANH MỤC HÌNH ẢNH

Hình 1.1. Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$	1
Hình 1.2. Hợp giữa hai quan hệ $\mathcal{R} \cup S$	2
Hình 1.3. Giao giữa hai quan hệ $\mathcal{R} \cap S$	2
Hình 1.4. Hiệu giữa hai quan hệ $\mathcal{R} \setminus S$	3
Hình 1.5. Quan hệ phản xạ $\mathcal{R}$	4
Hình 1.6. Quan hệ bắc cầu cung a $\mathcal{R} \circ$	4
Hình 1.7. Tính đối xứng của quan hệ.....	5
Hình 1.8. Tính phản xứng của quan hệ.....	5
Hình 1.9. Ma trận 0 - 1 biểu diễn một quan hệ phản xạ.....	8
Hình 1.10. Biểu diễn quan hệ đối xứng bằng ma trận 0 - 1	8
Hình 1.11. Biểu diễn quan hệ phản đối xứng bằng ma trận 0 - 1	9
Hình 1.12. Biểu diễn tính phản xạ $\mathcal{R}$ bằng đồ thị	11
Hình 1.13. Biểu diễn tính đối xứng $\mathcal{R}$ bằng đồ thị.....	11
Hình 1.14. Biểu diễn tính bắc cầu $\mathcal{R}$ bằng đồ thị.....	11
Hình 1.15. Các tính chất của quan hệ $\mathcal{R}$	12
Hình 1.16. Biểu diễn mô hình mạng máy tính	12
Hình 1.17. Minh họa thuật toán Warshall	16
Hình 1.18. Mô hình dữ liệu quan hệ Sinh Viên	18
Hình 1.19. Cơ sở dữ liệu giảng viên	19
Hình 1.20. Biểu diễn phép chiếu $P_{1,4}$ trên cơ sở dữ liệu.	19
Hình 1.21. Dữ liệu giảng viên và sinhvien.....	20
Hình 1.22. Minh họa phép hợp J_2	20
Hình 2.1. Bài toán 8 hậu hòa bình.....	36
Hình 2.2. Liệt kê chỉnh hợp lặp chập 2 của tập 3 phần tử	38
Hình 2.3. Liệt kê chỉnh hợp chập 2 của $\{1, 2, 3, 4\}$	39
Hình 3.1. Biểu diễn cạnh e của đồ thị vô hướng.....	44
Hình 3.2. Biểu diễn đồ thị vô hướng.....	44
Hình 3.3. Biểu diễn cung e của đồ thị có hướng.....	44
Hình 3.4. Minh họa đồ thị $G(6, 8)$	44
Hình 3.5. Đồ thị vô hướng $G(7, 6)$	45
Hình 3.6. Đồ thị có hướng $G(7, 6)$	45
Hình 3.7. Đồ thị lân tổ.....	46
Hình 3.8. Đồ thị quen biết.....	46
Hình 3.9. Đồ thị ảnh hưởng.....	47
Hình 3.10. Các đồ thị K_n	47
Hình 3.11. Các đồ thị vòng	47
Hình 3.12. Đồ thị vô hướng G và H	48

Hình 3.13. Biểu diễn đồ thị vô hướng G và đồ thị có hướng G_1	48
Hình 3.14. Biểu diễn đồ thị $G(6, 9)$	49
Hình 3.15. Biểu diễn đồ thị $G_1(6, 7)$	49
Hình 3.16. Chương trình minh họa danh sách kề hình 3.13	49
Hình 3.17. Đồ thị vô hướng $G(5, 7)$	50
Hình 3.18. Biểu diễn đồ thị có hướng $G(6, 8)$	50
Hình 3.19. Biểu diễn đồ thị vô hướng $G(5, 7)$	51
Hình 3.20. Biểu diễn đồ thị có hướng $G(6, 8)$	52
Hình 3.21. Đồ thị vô hướng $G(6, 8)$	53
Hình 3.22. Đồ thị vô hướng $G(4, 4)$	53
Hình 3.23. Đồ thị vô hướng $G(7, 14)$	53
Hình 3.24. Đồ thị vô hướng $G(10, 18)$	54
Hình 3.25. Đồ thị G_1 của chu trình Euler	54
Hình 3.26. Đồ thị G_2 của chu trình Euler	54
Hình 3.27. Đồ thị vô hướng $G(8, 11)$	56
Hình 3.28. Cập nhật nhãn đồ thị vô hướng $G(8, 11)$	57
Hình 3.29. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh a	57
Hình 3.30. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh f	58
Hình 3.31. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh b	58
Hình 3.32. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh c	59
Hình 3.33. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh d	59
Hình 3.34. Kết quả Dijkstra đối với $G(8, 11)$	60
Hình 3.35. Chương trình thuật toán Dijkstra đồ thị $G(8, 11)$	60
Hình 3.36. Đồ thị có hướng $G(6, 9)$	61
Hình 3.37. Chương trình minh họa thuật toán Floy đồ thị $G(6, 9)$	63
Hình 3.38. Bản đồ tô 3 màu	63
Hình 3.39. Bản đồ tô 4 màu	64
Hình 3.40. Sắc số đồ thị vô hướng $G(6, 10)$	64
Hình 3.41. Sắc số đồ thị vô hướng $G(7, 12)$	64
Hình 3.42. Sắc số đồ thị vô hướng $G(7, 13)$	65
Hình 3.43. Sắc số đồ thị vô hướng $G(10, 18)$	65
Hình 3.44. Sắc số màu 1 đồ thị vô hướng $G(10, 18)$	66
Hình 3.45. Sắc số màu 2 đồ thị vô hướng $G(10, 18)$	66
Hình 3.46. Sắc số màu 3 đồ thị vô hướng $G(10, 18)$	66
Hình 3.47. Minh họa hệ thống giao thông	67
Hình 3.48. Đồ thị minh họa hệ thống giao thông tuyến xung khắc	68
Hình 3.49. Đồ thị $G(7, 16)$ minh họa lập lịch	69
Hình 3.50. Biểu diễn cây	69
Hình 3.51. Biểu diễn rừng - 3 cây	70

Hình 3.52. Cây có số đỉnh treo bằng 0	70
Hình 3.53. Cây nhị phân đầy đủ chiều cao 3	71
Hình 3.54. Đơn đồ thị liên thông $G(7, 9)$	71
Hình 3.55. Các cây khung của G	72
Hình 3.56. Đồ thị G	73
Hình 3.57. Đồ thị G_0	74
Hình 3.58. Kruskal đồ thị $G(9, 16)$	75
Hình 3.59. Kruskal đơn đồ thị $G_1(6, 9)$	76
Hình 3.60. Cây khung T_1	76
Hình 3.61. Cây khung T_2	76
Hình 3.62. Cây khung T_3	77
Hình 3.63. Cây khung T_4	77
Hình 4.1. Các loại cổng cơ bản	84
Hình 4.2. Bản đồ Karnaugh cho 2 biến, 3 biến, 4 biến tương ứng (a, b, c).....	85
Hình 4.3. Bản đồ Karnaugh 2 biến Hình 4.4. Bản đồ Karnaugh 3 biến	86
Hình 4.5. Bản đồ Karnaugh 4 biến.....	86
Hình 4.6. Các bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích	87
Hình 4.7. Đơn giản hóa khai triển tổng các tích	87
Hình 4.8. Đơn giản hàm Boole bằng bản đồ Karnaugh.....	88

DANH SÁCH CÁC BẢNG

Bảng 2.1. Số Fibonacci họ nhà thỏ	34
Bảng 2.2. Phương án sắp xếp 8 hậu	37
Bảng 2.3. Phương án xếp hậu.....	38
Bảng 3.1. Biểu diễn ma trận kề $G(5, 6)$	50
Bảng 3.2. Biểu diễn ma trận kề $G(6, 8)$	50
Bảng 3.3. Biểu diễn ma liên thuộc $G(5, 7)$	51
Bảng 3.4. Biểu diễn ma trận liên thuộc $G(6, 8)$	52
Bảng 3.5. Kết quả tô màu hệ thống giao thông.....	68
Bảng 3.6. Kết quả tô màu đồ thị $G(7, 16)$	69
Bảng 3.7. Sắp xếp cạnh theo trọng số tăng dần $G_1(6, 9)$	76
Bảng 4.1. Biểu diễn hàm $F(x, y) = x\bar{y}$	83
Bảng 4.2. Biểu diễn hàm $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$	83
Bảng 4.3. Các hàm Boole $F(x, y)$	84
Bảng 4.4. Nhóm bit 1 của hàm $F_{x,y,z} = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$	89
Bảng 4.5. Tổ hợp các tiểu hạng biểu thức.....	89
Bảng 4.6. Kết quả cực tiểu hóa hàm $F_{x,y,z} = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$	90
Bảng 4.7. Biểu diễn hàm $F_{w,x,y,z}$ bằng chân trị.....	90
Bảng 4.8. Nhóm bit 1 cực tiểu hóa hàm $F_{w,x,y,z}$	91
Bảng 4.9. Tổ hợp các tiểu hạng biểu thức.....	91
Bảng 4.10. Kết quả phương pháp Quine - McLucKey hàm $F_{w,x,y,z}$	91

LỜI GIỚI THIỆU

Toán rời rạc hay còn gọi Toán học dành trong Máy tính là một môn toán dành riêng đối với ngành Công nghệ Thông tin. Toán rời rạc nghiên cứu các lĩnh vực và giải quyết các bài toán trên các đối tượng rời rạc dùng để đếm các đối tượng, và nghiên cứu các mối quan hệ giữa các tập rời rạc. Một trong những yếu tố làm môn học này trở nên quan trọng là việc lưu trữ, xử lý và biểu diễn những thông tin mà con người nạp vào cho máy tính dưới ngôn ngữ hình thức của con người. Chính vì vậy, Toán rời rạc là môn học bắt buộc trong chương trình đào tạo Công nghệ Thông tin và Điện tử Viễn thông. Song song đó, trong môn học này chúng ta sẽ sử dụng ngôn ngữ lập trình C để minh họa các bài tập đối với mỗi chương. Tài liệu được trình bày gồm có bốn chương.

Chương 1. Trình bày những kiến thức cơ bản về quan hệ; biểu diễn quan hệ và các phép toán liên quan cũng như những ứng dụng liên quan.

Chương 2. Trình bày những kiến thức cơ bản về Lý thuyết tổ hợp thông qua việc giải quyết ba bài toán điển hình đó là: Bài toán đếm; Bài toán tồn tại và bài toán liệt kê.

Chương 3. Trình bày những kiến thức cơ bản về Đồ thị, cũng như chú trọng giới thiệu và giải quyết các bài toán trọng tâm như bài toán Tìm đường đi ngắn nhất và các bài toán ứng dụng tô màu đồ thị.

Chương 4. Lý thuyết hàm đại số logic là cơ sở để nắm bắt những vấn đề phức tạp của kỹ thuật máy tính.

Mặc dù rất cẩn thận trong quá trình biên soạn, tuy nhiên tài liệu không thể tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Rất mong nhận được sự góp ý quý báu của tất cả bạn đọc. Mọi sự đóng góp xin gửi về email dungpt@dau.edu.vn.

Đà Nẵng, tháng 01 năm 2017

CHƯƠNG 1. QUAN HỆ

Mối liên hệ giữa các phần tử của các tập sẽ được bàn luận trong chương này. Ngày nào chúng ta cũng hay thường gặp các sự liên hệ với nhau, chẳng hạn giữa một doanh nghiệp với số điện thoại của họ, một nhân viên với tiền lương của anh ta, hay mối liên hệ giữa một trường đại học với sinh viên của trường đó.

Trong tin học thì chúng ta sẽ nghiên cứu các mối liên hệ giữa một chương trình với một biến mà chương trình đó sử dụng, giữa một ngôn ngữ với một câu lệnh đúng dùng trong ngôn ngữ đó,...

1.1. Quan hệ hai ngôi và các tính chất

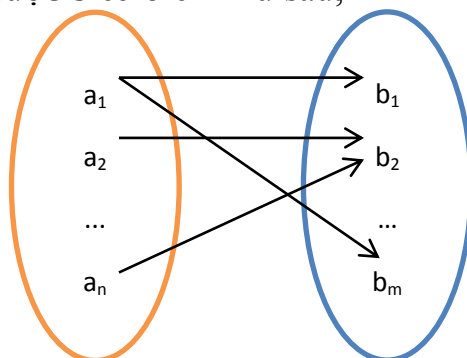
1.1.1. Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 1.1. Cho hai tập A, B khác rỗng. Một tập con $\mathfrak{R}$ của tích Descartes $A \times B$ được gọi là quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$ từ A vào B hay là một tập hợp chứa tất cả các bộ có dạng (a, b) với a là một phần tử của A và b là một phần tử của B .

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Trong đó, tập A được gọi là miền biến thiên (domain), còn tập B chính là miền giá trị (range) của quan hệ.

Như vậy, tức là $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$, hay chúng ta có thể hình dung quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$ là một tập từ A đến B được biểu diễn như sau,



Hình 1.1. Quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$

Khi đó, nếu $(a, b) \in \mathfrak{R}$ thì ta có thể viết $a \mathfrak{R} b$ và đọc là a có quan hệ $\mathfrak{R}$ với b . Còn nếu $(a, b) \notin \mathfrak{R}$ thì ta nói rằng a không có quan hệ $\mathfrak{R}$ với b và ký hiệu $a \overline{\mathfrak{R}} b$.

Chú ý.

- Nếu $A = B$ thì tập con $\mathfrak{R}$ của tích Descartes $A \times A$ được gọi là quan hệ trên A .
- Tích Descartes là tập các cặp có thứ tự, vì vậy quan hệ định nghĩa ở đây là quan hệ có hướng từ A vào B . Chúng ta cứ hình dung, các phần tử thuộc tập A là những phần tử xuất phát hoặc những phần tử nguồn của quan hệ; còn những phần tử thuộc tập B chính là những phần tử đích trong quan hệ.

Ví dụ 1.1. Cho $SV16CT = \{An, Hoa, Hồng\}$.

$$SV16DT = \{Quảng, Hóa, Thành, Nhung\}.$$

Hãy định nghĩa 5 phần tử của quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$ từ hai tập trên?

Theo định nghĩa trên, khi đó quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$ thỏa yêu cầu là,

$$\mathfrak{R} = \{(An, Quảng), (An, Hóa), (An, Thành), (Hoa, Nhung), (Hồng, Hóa)\}.$$

Ví dụ 1.2. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

Giả sử $\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 6), (3, 7), (4, 6), (5, 7)\} \subseteq A \times B$ là một quan hệ từ tập A vào tập B .

Khi đó, có 5 cặp quan hệ với $\mathcal{R}$ tức là $1 \mathcal{R} 4, 2 \mathcal{R} 6, 3 \mathcal{R} 7, 4 \mathcal{R} 6, 5 \mathcal{R} 7$; các cặp còn lại trong $A \times B$ không có quan hệ $\mathcal{R}$ với nhau.

Ví dụ 1.3. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Với mọi $a, b \in A$ ta định nghĩa $a \mathcal{R} b$ khi và chỉ khi $a + b$ là một số lẻ.

Khi đó $\mathcal{R}$ là một quan hệ từ A vào A , hay $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

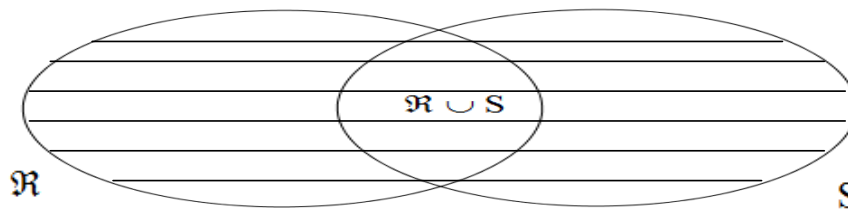
1.1.2. Các phép toán trên tập các quan hệ

1.1.2.1. Phép hợp

Định nghĩa 1.2. Hợp của hai tập quan hệ $\mathcal{R}$ và S được gọi là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc $\mathcal{R}$ hoặc thuộc S .

Ký hiệu: $\mathcal{R} \cup S = \{(x, y) | (x, y) \in \mathcal{R} \text{ hoặc } (x, y) \in S\}$

Có thể dễ hình dung về phép toán hợp của hai quan hệ trên chúng ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ Ven như sau,



Hình 1.2. Hợp giữa hai quan hệ $\mathcal{R} \cup S$

Ví dụ 1.4. Cho $A = \{1, 2, 3, 5\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Các quan hệ $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (5, 6)\}$ và $\mathcal{R}_2 = \{(1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 6), (5, 3)\}$. Hãy xác định $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$?

Giải: Hợp của hai quan hệ $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ được kết quả như sau,

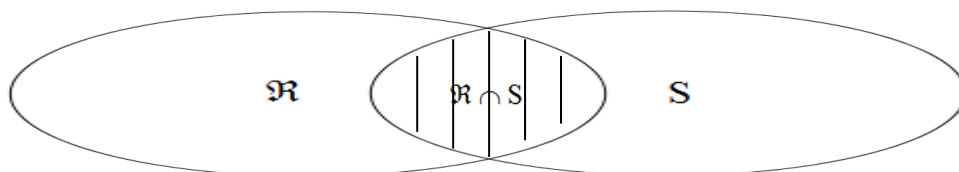
$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (5, 6), (1, 6), (5, 3)\}.$$

1.1.2.2. Phép giao

Định nghĩa 1.3. Giao của hai tập quan hệ $\mathcal{R}$ và S là tập tạo bởi tất cả các phần tử vừa thuộc $\mathcal{R}$ vừa thuộc S .

Ký hiệu: $\mathcal{R} \cap S = \{(x, y) | (x, y) \in \mathcal{R} \text{ và } (x, y) \in S\}$

Đồng thời, phép giao của hai tập quan hệ trên biểu diễn bằng biểu đồ Ven như hình vẽ minh họa sau,



Hình 1.3. Giao giữa hai quan hệ $\mathcal{R} \cap S$

Ví dụ 1.5. Dựa trên cơ sở của ví dụ 1.4 trên, hãy xác định giao của hai quan hệ $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$?

Giải: Dựa trên định nghĩa về phép giao ta có,

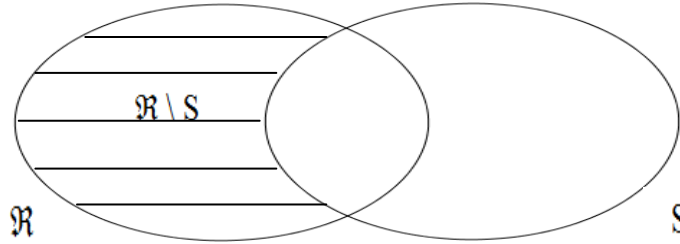
$$\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = \{(2, 2), (3, 3), (3, 6)\}.$$

1.1.2.3. Phép hiệu

Định nghĩa 1.4. Hiệu của hai tập quan hệ $\mathfrak{R}$ và S là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc $\mathfrak{R}$ mà không thuộc quan hệ S .

Ký hiệu: $\mathfrak{R} - S = \mathfrak{R} \setminus S = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathfrak{R} \text{ và } (x, y) \notin S\}$

Chúng ta có thể hình dung minh họa bằng biểu đồ Ven thể hiện phép toán hiệu như hình bên dưới sau,



Hình 1.4. Hiệu giữa hai quan hệ $\mathfrak{R} \setminus S$

Ví dụ 1.6. Dựa trên cơ sở ví dụ 1.4 hãy xác định phép hiệu của $\mathfrak{R}_1 \setminus \mathfrak{R}_2$ và $\mathfrak{R}_2 \setminus \mathfrak{R}_1$?

Giải: Ta có,

$$\mathfrak{R}_1 \setminus \mathfrak{R}_2 = \{(1, 1), (2, 4), (5, 6)\}.$$

$$\mathfrak{R}_2 \setminus \mathfrak{R}_1 = \{(1, 6), (5, 3)\}.$$

1.1.2.4. Phép hợp thành

Định nghĩa 1.5. Cho $\mathfrak{R}$ là quan hệ từ tập A đến tập B , và S là quan hệ từ tập B đến tập C . Hợp thành của $\mathfrak{R}$ và S ký hiệu $\mathfrak{R} \circ S$ chính là một quan hệ bao gồm các cặp được sắp xếp (a, c) , trong đó $a \in A$, $c \in C$, và đối với chúng tồn tại một phần tử $b \in B$ sao cho $(a, b) \in \mathfrak{R}$ và $(b, c) \in S$.

Ví dụ 1.7. Tìm quan hệ hợp thành của các quan hệ $\mathfrak{R}$ và S , trong đó $\mathfrak{R}$ là quan hệ từ tập $A = \{1, 2, 3\}$ đến tập $B = \{1, 2, 3, 4\}$ với $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ và S là quan hệ từ tập B đến tập $C = \{0, 1, 2\}$, trong đó $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Giải: $\mathfrak{R} \circ S$ được tạo nên bằng cách dùng tất cả các cặp được sắp xếp trong $\mathfrak{R}$ và S , trong đó phần tử thứ hai của mỗi cặp thuộc $\mathfrak{R}$ phù hợp với phần tử thứ nhất của mỗi cặp trong S .

Các cặp $(2, 3) \in \mathfrak{R}$ và $(3, 1) \in S$ sẽ tạo nên cặp $(2, 1) \in \mathfrak{R} \circ S$. Bằng cách tính như vậy với tất cả các cặp được sắp xếp như trên, chúng ta tìm được kết quả như sau,

$$\mathfrak{R} \circ S = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Ví dụ 1.8. Cho quan hệ $\mathfrak{R}$ từ tập $SV1 = \{\text{Hoa, Hồng, Huy, Ngân}\}$ vào tập $\text{QueQuan} = \{\text{Đà Nẵng, Hà Nội, Quảng Bình, Quảng Trị, Huế}\}$, với định nghĩa sau,

$$\mathfrak{R} = \{(\text{Hoa, Đà Nẵng}), (\text{Huy, Quảng Bình}), (\text{Hồng, Huế}), (\text{Ngân, Hà Nội})\}.$$

Quan hệ S từ tập $QueQuan$ vào tập $SV2 = \{Bích, Hằng, Nhung, Thảo, Hiếu\}$, với định nghĩa $S = \{(Đà Nẵng, Bích), (Hà Nội, Nhung), (Quảng Bình, Thảo), (Quảng Trị, Hiếu)\}$. Tìm quan hệ $R \circ S$?

Giải: Quan hệ hợp thành giữa $\mathcal{R}$ và S với kết quả xác định như sau,

$$\mathcal{R} \circ S = \{(Hoa, Bích), (Huy, Thảo), (Ngân, Nhung)\}.$$

1.1.3. Các tính chất của quan hệ hai ngôi

Có một số tính chất được dùng để phân loại các quan hệ trên một tập. Trong phần này chúng ta sẽ xét những tính chất quan trọng nhất mà thường đề cập nhiều trong quan hệ hai ngôi. Chúng ta bắt đầu bằng cách định nghĩa một số tính chất cơ bản: *tính phản xạ* (reflexivity), *tính bắc cầu* (transitivity), *tính đối xứng* (symmetry) và *tính phản đối xứng* (antisymmetry). Chúng được tổ hợp lại để tạo nên các quan hệ hai ngôi thường gặp đó là quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự.

Định nghĩa 1.6. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A có tính phản xạ nếu $(a, a) \in \mathcal{R}$ đối với mọi phần tử $a \in A$.

Hình bên dưới thể hiện tính chất phản xạ của một quan hệ hay biểu diễn tường minh nó như một đồ thị có một vòng khép kín trên mỗi phần tử của miền biến thiên.



Hình 1.5. Quan hệ phản xạ $\mathcal{R}$

Ví dụ 1.9. Xét các quan hệ trên tập $\{1, 3, 4, 5\}$ sau đây,

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 5), (3, 4), (4, 1), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}.$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 5), (5, 1)\}.$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (1, 5), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}.$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(3, 1), (3, 5), (4, 1), (4, 5), (4, 3), (5, 1)\}.$$

$$\mathcal{R}_5 = \{(1, 1), (1, 5), (1, 3), (1, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 3), (5, 4)\}.$$

$$\mathcal{R}_6 = \{(3, 4)\}.$$

Trong số những quan hệ trên quan hệ nào có tính chất phản xạ?

Giải: Các quan hệ $\mathcal{R}_3$ và $\mathcal{R}_5$ là những quan hệ có tính chất phản xạ vì cả hai đều chứa tất cả các dạng (a, a) , đó là $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ và $(5, 5)$.

Các quan hệ khác không phải là phản xạ.

Ví dụ 1.10. Quan hệ $\geq$ trên số thực có tính phản xạ. Với mỗi số thực a , chúng ta có $a \geq a$. Tương tự, $\leq$ cũng có tính phản xạ, và cả hai quan hệ này cũng đều có tính phản xạ trên tập số nguyên. Tuy nhiên, $<$ và $>$ không có tính phản xạ bởi vì $a < a$ và $a > a$ là sai với ít nhất một giá trị của a , thực sự chúng đều sai với mọi giá trị a .

Định nghĩa 1.7. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A được gọi là quan hệ có tính chất bắc cầu (hay tính chuyển tiếp) nếu bất kỳ lúc nào $(a, b) \in \mathcal{R}$ và $(b, c) \in \mathcal{R}$ thì $(a, c) \in \mathcal{R}$, đối với $a, b, c \in A$. Cụ thể hơn,



Hình 1.6. Quan hệ bắc cầu của $\mathcal{R}$

Ví dụ 1.11. Xét quan hệ $<$ trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Nghĩa là $<$ là tập các cặp số nguyên (a, b) sao cho a nhỏ hơn b . Như vậy, quan hệ $<$ có tính bắc cầu bởi vì nếu $a < b$ và $b < c$, chúng ta biết rằng $a < c$. Tương tự, các quan hệ $>$, $\geq$ và $\leq$ trên tập số nguyên cũng có tính bắc cầu. Bốn quan hệ so sánh này cũng đều có tính chất bắc cầu trên tập số thực.

Ví dụ 1.12. Trong ví dụ 1.9 những quan hệ nào là có tính bắc cầu?

Giải: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ và $\mathcal{R}_6$ là những quan hệ có tính chuyển tiếp. Những quan hệ còn lại không có tính chất này. $\mathcal{R}_1$ không phải chuyển tiếp vì $(3, 4)$ và $(4, 1)$ thuộc $\mathcal{R}_1$, nhưng $(3, 1)$ không thuộc $\mathcal{R}_1$.

Định nghĩa 1.8. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A được gọi là quan hệ có tính chất đối xứng nếu $(b, a) \in \mathcal{R}$ bất kỳ khi nào $(a, b) \in \mathcal{R}$, với $a, b \in A$. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A sao cho $(a, b) \in \mathcal{R}$ và $(b, a) \in \mathcal{R}$ khi và chỉ khi $a = b$, với $a, b \in \mathcal{R}$ được gọi là phản đối xứng.

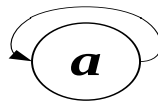
Điều đó có nghĩa một quan hệ là đối xứng nếu và chỉ nếu a quan hệ với b sẽ kéo theo b quan hệ với a . Một quan hệ là phản đối xứng nếu và chỉ nếu không có cặp nào của phần tử riêng biệt a và b mà a có quan hệ với b đồng thời b cũng có quan hệ với a . Các thuật ngữ đối xứng và phản đối xứng ở đây không có nghĩa đối nghịch nhau, bởi vì một quan hệ có thể có cả hai tính chất này hoặc không có cả hai tính chất này.

Chúng ta nói rằng $\mathcal{R}$ là đối xứng nếu nó là đảo của chính nó. Nghĩa là $\mathcal{R}$ là đối xứng nếu mỗi khi có $a \mathcal{R} b$ chúng ta cũng có $b \mathcal{R} a$. Hình bên dưới thể hiện hình ảnh minh họa của tính đối xứng trong đồ thị của một quan hệ.



Hình 1.7. Tính đối xứng của quan hệ

Chúng ta nói $\mathcal{R}$ là phản đối xứng nếu $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} a$ đều đúng chỉ khi $a = b$. Chú ý rằng một quan hệ phản xứng có thể là phản xạ.



Hình 1.8. Tính phản xứng của quan hệ

Ví dụ 1.13. Những quan hệ nào trong ví dụ 1.9 là đối xứng, quan hệ nào là phản đối xứng?

Giải: Các quan hệ $\mathcal{R}_2$ và $\mathcal{R}_3$ là đối xứng vì trong mỗi trường hợp (b, a) đều thuộc các quan hệ đó nếu (a, b) thuộc các quan hệ đó.

Đối với $\mathcal{R}_2$ điều duy nhất cần phải kiểm tra là cả $(2, 1)$ và $(1, 2)$ đều thuộc quan hệ đó.

Đối với $\mathcal{R}_3$ cần kiểm chứng rằng cả $(1, 2)$ lẫn $(2, 1)$ đều thuộc quan hệ $\mathcal{R}_3$, đồng thời $(1, 4)$ và $(4, 1)$ cũng thuộc quan hệ đó.

Các quan hệ $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ và $\mathcal{R}_6$ là những quan hệ có tính chất phản đối xứng.

1.1.4. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự

1.1.4.1. Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.9. Giả sử $\mathcal{R}$ là quan hệ hai ngôi trên tập A . Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là quan hệ tương đương trên A nếu $\mathcal{R}$ thỏa mãn ba tính chất sau,

- Tính phản xạ: $\forall a \in A$ ta có $a \mathcal{R} a$;
- Tính đối xứng: $\forall a, b \in A$ nếu $a \mathcal{R} b$ thì $b \mathcal{R} a$;
- Tính bắc cầu: $\forall a, b, c \in A$ nếu $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} c$ thì $a \mathcal{R} c$.

Khi $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương và $a \mathcal{R} b$ ta viết: $a \sim b (\mathcal{R})$ và đọc “ a tương đương b theo quan hệ $\mathcal{R}$ ”.

Ví dụ 1.14. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Trên A ta định nghĩa quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau: $\forall a, b \in A \Leftrightarrow a + b = 2k$, với k là một số nguyên dương nào đó. Hãy chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A ?

Theo định nghĩa, $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A tức là ta cần chỉ ra $\mathcal{R}$ thỏa mãn ba tính chất trên. Thật vậy,

- Tính phản xạ: $\forall a \in A$ ta có $a + a = 2a$ nên $a \mathcal{R} a$.
- Tính đối xứng: Giả sử $a, b \in A$ và $a \mathcal{R} b$ khi đó $a + b = 2k$, do đó $b + a = 2k$ nên $b \mathcal{R} a$.
- Tính bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in A$ và $a \mathcal{R} b, b \mathcal{R} c$; tức là,

$$a + b = 2k_1 \text{ và } b + c = 2k_2.$$

$$\text{Xét } a + c = (2k_1 - b) + (2k_2 - b) = 2(k_1 + k_2 - b) = 2k_3.$$

Từ đó suy ra $a + c = 2k_3$, với k_3 là một số nguyên dương nào đó, nên $a \mathcal{R} c$. Vậy $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương(đpcm).

Ví dụ 1.15. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ sao cho $a \mathcal{R} b$ nếu và chỉ nếu $a = b$ hoặc $a = -b$. Hãy chứng minh $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương?

Thật vậy, $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương tức là ta chỉ cần chỉ ra $\mathcal{R}$ thỏa mãn ba tính chất như sau,

- Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{Z}$, ta có $a = a$ nên $a \mathcal{R} a$.
- Đối xứng: Giả sử $a, b \in \mathbb{Z}$, khi đó $a = \pm b$ do đó, $a \mathcal{R} b$.
- Bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}$, khi đó $a = \pm b$ và $b = \pm c$. Từ đó suy ra kéo theo $a = \pm c$. Vì vậy $a \mathcal{R} c$.

Vậy $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương(đpcm).

1.1.4.2. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.10. Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên tập A gọi là một quan hệ thứ tự nếu nó có ba tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

1.2. Biểu diễn quan hệ

Có nhiều cách biểu diễn một quan hệ giữa các tập hữu hạn. Như đã đề cập một trong những cách biểu diễn đó là liệt kê các cặp được sắp của nó. Trong mục này, chúng ta sẽ xét hai cách khác để thể hiện các quan hệ đó bằng việc sử dụng phương pháp dùng ma trận 0 - 1 và phương pháp đồ thị có hướng.

1.2.1. Biểu diễn bằng ma trận 0 - 1

Cho hai tập hữu hạn $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ và $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Giả sử là một quan hệ từ A vào B , tức là $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Khi đó, ma trận biểu diễn của quan hệ $\mathcal{R}$ là $M_{\mathcal{R}}^{n \times m} = [m_{ij}]$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$) gồm có n hàng và m cột mà mỗi phần tử m_{ij} ở hàng thứ i và cột thứ j được xác định như sau,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i, b_j \in \mathcal{R} \\ 0, & a_i, b_j \notin \mathcal{R} \end{cases}.$$

Nói cách khác, ma trận 0 - 1 biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ có phần tử m_{ij} nhận giá trị 1 hoặc 0 nên ma trận này còn được gọi là ma trận logic hoặc ma trận không - một. Rõ ràng khi biết quan hệ $\mathcal{R}$ ta luôn tìm được ma trận logic tương ứng biểu diễn nó, và ngược lại khi biết ma trận logic thì ta luôn xác định được quan hệ $\mathcal{R}$ ứng với ma trận logic.

Ví dụ 1.16. Cho $A = \{a, b, c, d, e\}$ và $B = \{x, y, z, t\}$. Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ từ A vào B : $\mathcal{R} = \{(a, x), (a, t), (b, t), (c, y), (d, z), (d, t), (e, x)\}$. Hãy xác định ma trận biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$?

Khi đó ma trận biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ tương ứng sẽ là,

$$M_{\mathcal{R}}^{5 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng từ ma trận trên, chúng ta dễ dàng xác định được quan hệ $\mathcal{R}$. Đồng thời, các số 1 biểu diễn trong $M_{\mathcal{R}}^{5 \times 4}$ cho thấy rằng có tất cả 7 phần tử ở các vị trí (i, j) tương ứng trong ma trận thuộc quan hệ $\mathcal{R}$.

Ví dụ 1.17. Cho $Lop = \{16CT, 16DT, 15XD, 14DH\}$ và $Khoa = \{\text{Công nghệ, Xây dựng, Kiến trúc}\}$. Giả sử $\mathcal{R}$ là quan hệ từ Lop đến $Khoa$ và được định nghĩa như sau,

$$\mathcal{R} = \{(16CT, \text{Công nghệ}), (16DT, \text{Công nghệ}), (15XD, \text{Xây dựng}), (14DH, \text{Kiến trúc})\}.$$

Hãy biểu diễn ma trận không - một thể hiện quan hệ $\mathcal{R}$ trên?

Khi đó ta có ma trận không - một biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ là,

$$M_{\mathcal{R}}^{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 1.18. Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 2\}$. Giả sử $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, với $\mathcal{R} = \{(a, b) | \forall a \in A, \forall b \in B, a > b\}$. Hãy xác định ma trận 0 - 1 nào biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ nếu $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ và $b_1 = 1, b_2 = 2$?

Giải: Quan hệ $\mathcal{R}$ được định nghĩa như trên, tức là $\mathcal{R} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

Vậy ma trận biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ tương ứng sẽ là,

$$M_{\mathfrak{R}}^{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các số 1 trong ma trận trên giúp chúng ta biết được rằng các cặp (2, 1), (3, 1), (3, 2) thuộc $\mathfrak{R}$. Các số 0 cho thấy rằng các cặp ở các vị trí (i, j) còn lại không thuộc quan hệ $\mathfrak{R}$.

Ví dụ 1.19. Cho $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Các cặp sắp nào thuộc quan hệ $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$ được biểu diễn bởi ma trận sau,

$$M_{\mathfrak{R}}^{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải: Vì $\mathfrak{R}$ gồm các cặp được sắp xếp (a_i, b_j) với $m_{ij} = 1$, nên ta có,

$$\mathfrak{R} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}.$$

Nhận xét. Bằng phương pháp biểu diễn quan hệ theo ma trận 0 - 1, và chúng ta có thể nói rằng ma trận của một quan hệ trên một tập là một ma trận vuông và nó có thể được dùng để xác định một số tính chất cụ thể của quan hệ.

Chúng ta biết rằng, quan hệ $\mathfrak{R}$ trên tập A có tính chất phản xạ nếu cặp $(a, a) \in \mathfrak{R}$ với mọi $a \in A$. Như vậy, $M_{\mathfrak{R}}^{n \times n}$ có tính chất phản xạ khi và chỉ khi $m_{ij} = 1$, với $i = j = \overline{1, n}$, hay $(a_i, a_j) \in \mathfrak{R}$ với $i = j = \overline{1, n}$.

Nói một cách khác $\mathfrak{R}$ là phản xạ nếu mọi phần tử trên đường chéo chính của $M_{\mathfrak{R}}$ đều bằng 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Hình 1.9. Ma trận 0 - 1 biểu diễn một quan hệ phản xạ

Quan hệ $\mathfrak{R}$ là đối xứng nếu $(a, b) \in \mathfrak{R}$ kéo theo $(b, a) \in \mathfrak{R}$. Do đó, ma trận biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ trên tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu,

$$(a_j, a_i) \in \mathfrak{R}, \forall (a_i, a_j) \in \mathfrak{R}.$$

Hay:

$$m_{ij} = m_{ji} = 1$$

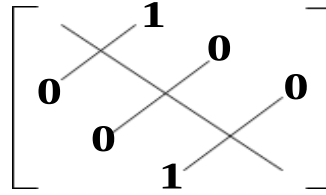
$$m_{ij} = m_{ji} = 0.$$

Do đó, ma trận $M_{\mathfrak{R}}$ có tính chất đối xứng thỏa điều kiện $m_{ij} = m_{ji}$ với $i, j = \overline{1, n}$.

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Hình 1.10. Biểu diễn quan hệ đối xứng bằng ma trận 0 - 1

Ngoài ra, quan hệ $\mathfrak{R}$ có tính phản đối xứng nếu và chỉ nếu $(a, b) \in \mathfrak{R}$ và $(b, a) \in \mathfrak{R}$ kéo theo $a = b$. Đồng thời, khi đó ma trận $M_{\mathfrak{R}}$ thỏa tính chất này nếu $m_{ij} = 1$ thì $m_{ji} = 0$ với $i \neq j$. Dạng ma trận biểu diễn quan hệ phản đối xứng được minh họa như hình dưới sau,



Hình 1.11. Biểu diễn quan hệ phản đối xứng bằng ma trận 0 - 1

Ví dụ 1.20. Giả sử quan hệ $\mathfrak{R}$ trên một tập được biểu diễn bởi ma trận sau,

$$M_{\mathfrak{R}}^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{R}$ có các tính chất phản xạ, đối xứng, và/hoặc phản đối xứng hay không?

Giải: Vì tất cả các phần tử trên đường chéo chính của ma trận này đều bằng 1, nên $\mathfrak{R}$ có tính chất phản xạ. Ngoài ra, vì $M_{\mathfrak{R}}$ là đối xứng, nên có thể suy ra $\mathfrak{R}$ cũng có tính chất đối xứng. Đồng thời chúng ta dễ dàng thấy rằng, $\mathfrak{R}$ không có tính chất phản đối xứng.

1.2.2. Các tính chất, phép toán của quan hệ biểu diễn bằng ma trận

Một cách biểu diễn quan hệ chính là thể hiện bằng ma trận 0 - 1. Ma trận này còn được gọi là ma trận zero - một thường được dùng để biểu diễn các cấu trúc rời rạc. Các phép toán Boole sử dụng đối với các ma trận 0 - 1 đó là phép hợp, phép giao để tìm các ma trận biểu diễn của các quan hệ.

Định nghĩa 1.11. Giả sử $\mathfrak{R}_1$ và $\mathfrak{R}_2$ là các quan hệ trên tập A được biểu diễn bởi các ma trận 0 - 1 tương ứng là $M_{\mathfrak{R}_1}$ và $M_{\mathfrak{R}_2}$, tức là giả sử $M_{\mathfrak{R}_1} = [a_{ij}]$ và $M_{\mathfrak{R}_2} = [b_{ij}]$ với kích thước $m \times n$. Khi đó, hợp của $M_{\mathfrak{R}_1}$ và $M_{\mathfrak{R}_2}$, được ký hiệu là,

$$M_{\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2} = M_{\mathfrak{R}_1} \cup M_{\mathfrak{R}_2} = a_{ij} \vee b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{nếu } a_{ij} = 1 \text{ hoặc } b_{ij} = 1 \\ 0, \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Ví dụ 1.21. Giả sử các quan hệ $\mathfrak{R}_1$ và $\mathfrak{R}_2$ trên tập A được biểu diễn bởi ma trận sau,

$$M_{\mathfrak{R}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } M_{\mathfrak{R}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận biểu diễn $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$?

Giải: Ma trận biểu diễn hợp của hai quan hệ trên là,

$$\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 = M_{\mathfrak{R}_1} \vee M_{\mathfrak{R}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.12. Giả sử $M_{\mathfrak{R}_1}$ và $M_{\mathfrak{R}_2}$ là hai ma trận 0 - 1 biểu diễn tương ứng hai quan hệ $\mathfrak{R}_1$ và $\mathfrak{R}_2$ trên tập A. Khi đó, giao của hai ma trận này được xác định như sau,

$$M_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2} = M_{\mathcal{R}_1} \cap M_{\mathcal{R}_2} = a_{ij} \wedge b_{ij} = \begin{matrix} 1, \text{ nếu } a_{ij} = 1 \text{ và } b_{ij} = 1 \\ 0, \text{ các trường hợp còn lại} \end{matrix}$$

Ví dụ 1.22. Dựa trên cơ sở của ví dụ 1.21, hãy tìm ma trận biểu diễn $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$?

Giải: Ma trận biểu diễn giao của hai quan hệ trên được kết quả như sau,

$$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = M_{\mathcal{R}_1} \wedge M_{\mathcal{R}_2} = \begin{matrix} & 1 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \end{matrix}$$

Ngoài ra, chúng ta có thể xác định ma trận hợp thành biểu diễn các quan hệ. Ma trận này tìm được bằng cách dùng tích Boole của các ma trận biểu diễn các quan hệ đó, và nó được xác định như sau,

$$\mathcal{R} \circ S = M_{\mathcal{R} \circ S} = M_{\mathcal{R}} \circ M_S = a_{i1} \wedge b_{1j} \vee a_{i2} \wedge b_{2j} \vee \dots \vee a_{ik} \wedge b_{kj}.$$

Đồng thời, ma trận hợp thành biểu diễn hai quan hệ cũng có thể được dùng để tìm ma trận biểu diễn $\mathcal{R}^n$. Cụ thể là,

$$M_{\mathcal{R}^n} = M_{\mathcal{R}}^{[n]} = M_{\mathcal{R}} \circ M_{\mathcal{R}}^{[2]} \circ \dots \circ M_{\mathcal{R}}^{[n]}.$$

Ví dụ 1.23. Tìm ma trận biểu diễn quan hệ $\mathcal{R} \circ S$, nếu biết ma trận biểu diễn $\mathcal{R}$ và S là,

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{matrix} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \text{ và } M_S = \begin{matrix} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Giải: Ma trận biểu diễn phép hợp thành của hai quan hệ ứng với hai ma trận trên được xác định như sau,

$$M_{\mathcal{R} \circ S} = M_{\mathcal{R}} \circ M_S = \begin{matrix} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Ví dụ 1.24. Tìm ma trận biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}^2$, biết ma trận biểu diễn $\mathcal{R}$ như sau,

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} ?$$

Giải: Ma trận biểu diễn hợp thành của quan hệ $\mathcal{R}^2$ được kết quả như sau,

$$M_{\mathcal{R}^2} = M_{\mathcal{R}}^2 = M_{\mathcal{R}} \circ M_{\mathcal{R}} = \begin{matrix} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

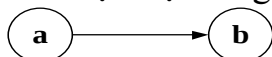
1.2.3. Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị có hướng

Ở các nội dung trên, chúng ta đã đề cập một quan hệ có thể biểu diễn bằng cách liệt kê, hay dùng ma trận 0 - 1. Ngoài ra có thể nói còn một cách quan trọng khác biểu diễn quan hệ đó chính là dùng phương pháp đồ thị.

Cho tập hữu hạn khác rỗng $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Khi đó một quan hệ $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị có hướng như sau,

- Mỗi phần tử $a \in A$ được xem là một đỉnh của đồ thị.
- Với $(a, b) \in \mathcal{R}$ hay $a \mathcal{R} b$ thì tồn tại một cung đi từ đỉnh a đến đỉnh b .



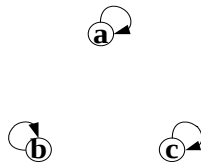
Chú ý.

- Nếu $(a, a) \in \mathfrak{R}$ thì ta có một khuyên tại đỉnh a: 
- Nếu $(a, b) \notin \mathfrak{R}$ thì không có một cung nào đi từ a đến b.

Cũng như đối với cách biểu diễn quan hệ bằng ma trận, với mỗi một quan hệ $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$ ta có thể biểu diễn quan hệ đó bằng đồ thị có hướng và ngược lại, ứng với mỗi một đồ thị có hướng mà các đỉnh thuộc tập A có thể xác định được một quan hệ $\mathfrak{R}$ trên A, sao cho nó nhận đồ thị là dạng biểu diễn của chính nó.

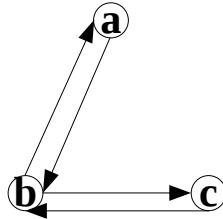
Bên cạnh đó, phương pháp biểu diễn này có thể được dùng để xác định xem quan hệ đó có một số tính chất nào đó hay không, cụ thể hơn,

- Quan hệ có tính chất phản xạ nếu và chỉ nếu có một khuyên ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng.



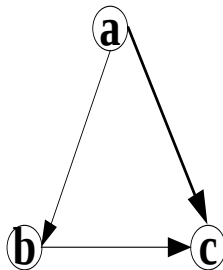
Hình 1.12. Biểu diễn tính phản xạ $\mathfrak{R}$ bằng đồ thị

- Quan hệ có tính đối xứng, nếu và chỉ nếu đối với mỗi một cạnh giữa các đỉnh phân biệt trong đồ thị có hướng của nó đều có một cạnh có hướng ngược lại, tức là (x, y) thuộc quan hệ thì luôn tồn tại (y, x) thuộc quan hệ đó.



Hình 1.13. Biểu diễn tính đối xứng $\mathfrak{R}$ bằng đồ thị

- Tương tự, một quan hệ là phản đối xứng, nếu và chỉ nếu không bao giờ có hai cạnh ngược hướng nối cùng cặp đỉnh phân biệt.
- Cuối cùng, một quan hệ là bắc cầu, nếu và chỉ nếu mỗi khi có một cạnh nối cặp đỉnh a với b, và một cạnh nối cặp đỉnh b với c, thì cũng có một cạnh nối cặp đỉnh a với c, tức là,



Hình 1.14. Biểu diễn tính bắc cầu $\mathfrak{R}$ bằng đồ thị

Ví dụ 1.25. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và quan hệ $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$ được xác định như sau:

$$\mathfrak{R} = \{(a, b) \mid \forall a, b \in A; (a - b) : 2\}.$$

Hãy biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ theo cả ba phương pháp trên?

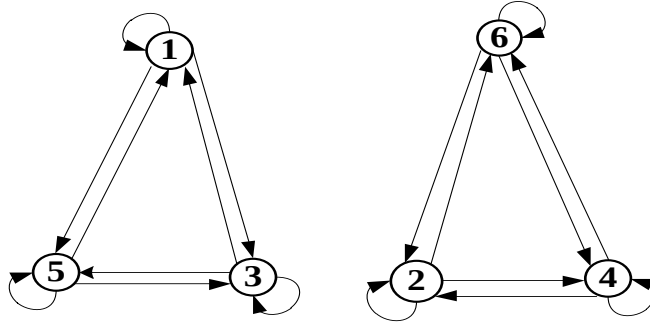
Giải:

- Biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ theo cách định nghĩa, tức là,
 $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$.

- Biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ theo phương pháp ma trận 0 - 1, ta có,

$$M_{\mathcal{R}}^{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

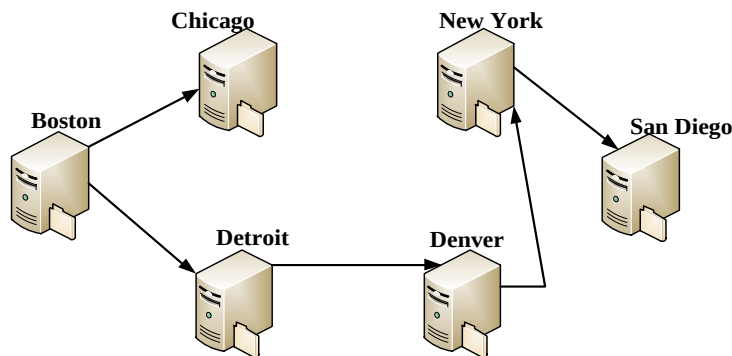
- Biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ bằng phương pháp đồ thị, ta có,



Hình 1.15. Các tính chất của quan hệ $\mathcal{R}$

1.3. Bao đóng của quan hệ

Một mạng máy tính có các trung tâm dữ liệu được đặt tại các địa điểm như Boston, Chicago, Denver, Detroit, New York, và San Diego. Các đường dây điện thoại một chiều trực tiếp từ Boston đến Chicago, từ Boston đến Detroit, từ Detroit đến Denver, từ Denver đến New York, và từ New York đến San Diego.



Hình 1.16. Biểu diễn mô hình mạng máy tính

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ chứa các cặp (a, b) nếu có một dây điện thoại nối từ trung tâm dữ liệu ở a đến trung tâm dữ liệu ở b . Làm thế nào để xác định có một đường liên lạc nào đó (có thể là gián tiếp) bao gồm một hoặc nhiều đường điện thoại từ trung tâm này đến trung tâm khác hay không? Vì không phải các đường liên lạc đều là trực tiếp, chẳng hạn từ Boston đến Denver phải qua Detroit, nên không thể dùng $\mathcal{R}$ để trả lời trực tiếp cho câu hỏi này. Theo định nghĩa quan hệ đã đề cập thì $\mathcal{R}$ không

phải là chuyển tiếp nên nó không chứa tất cả các cặp có thể liên lạc với nhau. Nhưng điều đó sẽ được đề cập rõ trong mục này, chúng ta có thể tìm được tất cả các đường liên lạc giữa các cặp trung tâm dữ liệu bằng cách thiết lập một quan hệ chuyển tiếp ngắn nhất mà chứa $\mathfrak{R}$. Quan hệ lúc này gọi là bao đóng chuyển tiếp (hay bao đóng bắc cầu hoặc bao đóng truyền ứng) của $\mathfrak{R}$.

Tóm lại, nếu $\mathfrak{R}$ là một quan hệ trên tập A thì $\mathfrak{R}$ có thể có hoặc không có một tính chất $\mathbf{P}$ nào đó như tính phản xạ, tính đối xứng hay tính bắc cầu. Nếu có một quan hệ S có tính chất $\mathbf{P}$ và chứa $\mathfrak{R}$ sao cho S là một tập con của tất cả các quan hệ có tính chất $\mathbf{P}$ và chứa $\mathfrak{R}$, thì S được gọi là bao đóng của $\mathfrak{R}$ đối với $\mathbf{P}$. Chúng ta sẽ nghiên cứu cách tìm bao đóng của các quan hệ phản xạ, đối xứng, và bắc cầu.

1.3.1. Định nghĩa bao đóng quan hệ

Định nghĩa 1.13. Giả sử $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$, bao đóng phản xạ của quan hệ $\mathfrak{R}$ ký hiệu là $\mathfrak{R}_{\text{px}}$ là một quan hệ mới chứa $\mathfrak{R}$ và nhỏ nhất thỏa tính chất phản xạ của một quan hệ.

Ví dụ 1.26. Cho quan hệ $\mathfrak{R}$ được định nghĩa trên tập $A = \{1, 2, 3\}$ và cụ thể như sau,

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}.$$

Hãy xác định bao đóng phản xạ của quan hệ $\mathfrak{R}$?

Giải: Ta thấy rằng, quan hệ $\mathfrak{R}$ được định nghĩa như trên không thỏa tính chất phản xạ.

Vì vậy, theo định nghĩa bao đóng phản xạ của quan hệ $\mathfrak{R}$ được xác định như sau,

$$\mathfrak{R}_{\text{px}} = \{(2, 2), (3, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}.$$

Như vậy chúng ta thấy được rằng cách xác định bao đóng phản xạ của $\mathfrak{R}$ bằng việc bổ sung thêm tất cả các cặp (a, a) với $a \in A$ mà chưa có trong $\mathfrak{R}$, việc bổ sung thêm những cặp này sẽ tạo ra một quan hệ mới có tính phản xạ.

Ví dụ 1.27. Tìm bao đóng phản xạ của quan hệ $\mathfrak{R} = \{(a, b) \mid a < b\}$ trên tập các số nguyên?

Giải: Để xác định bao đóng phản xạ của quan hệ $\mathfrak{R}$ trên, ta thực hiện thông qua hai bước,

Bước 1. Tìm một quan hệ mới để thỏa tính chất phản xạ trên $\mathfrak{R}$.

$$\Delta = \{(a, a) \mid a = a, a \in \mathbb{Z}\}.$$

Bước 2. Bao đóng phản xạ của quan hệ là,

$$\mathfrak{R}_{\text{px}} = \mathfrak{R} \cup \Delta = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, a) \mid a = a, a \in \mathbb{Z}\} = \{(a, b) \mid a \leq b\}.$$

Định nghĩa 1.14. Giả sử $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$, bao đóng đối xứng của quan hệ $\mathfrak{R}$ ký hiệu $\mathfrak{R}_{\text{dx}}$ chính là một quan hệ mới sao cho chứa $\mathfrak{R}$ và có tính đối xứng.

Ví dụ 1.28. Giả sử $\mathfrak{R}$ được định nghĩa trên tập $A = \{1, 2, 3\}$ với,

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Hãy xác định bao đóng đối xứng của quan hệ trên?

Giải: Bao đóng đối xứng của quan hệ $\mathfrak{R}$ là,

$$\mathfrak{R}_{\text{dx}} = \{(1, 3), (2, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Giả sử quan hệ $\mathcal{R}$ đã định nghĩa không có tính bắc cầu. Làm cách nào để tạo ra được một quan hệ mới $[\mathcal{R}]$ tức là bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa $\mathcal{R}$ và thỏa tính bắc cầu.

Điều đó có thể được thực hiện bằng cách bổ sung thêm tất cả các cặp dạng $(a, c) \in [\mathcal{R}]$, trong đó $(a, b) \in \mathcal{R}$ và $(b, c) \in \mathcal{R}$.

Hãy xét quan hệ $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên không thỏa tính bắc cầu vì $(1, 3) \in \mathcal{R}$ và $(3, 2) \in \mathcal{R}$, nhưng không tồn tại phần tử $(1, 2) \in \mathcal{R}, \dots$ Vì vậy, để xác định được bao đóng bắc cầu của quan hệ $\mathcal{R}$ trên chúng ta cần bổ sung thêm 4 cặp phần tử đó là $(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)$.

Như vậy, bao đóng bắc cầu quan hệ $\mathcal{R}$ chính là,

$$[\mathcal{R}] = \mathcal{R}^* = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}.$$

Tuy nhiên, bao đóng bắc cầu vừa tìm được không thỏa tính bắc cầu của quan hệ, cụ thể đó là $(1, 3) \in [\mathcal{R}]$ và $(3, 1) \in [\mathcal{R}]$ nhưng $(1, 1) \notin [\mathcal{R}]$; hay $(3, 1) \in [\mathcal{R}]$ và $(1, 4) \in [\mathcal{R}]$ nhưng $(3, 4) \notin [\mathcal{R}]$.

Điều đó chứng tỏ việc xác định bao đóng bắc cầu phức tạp hơn nhiều so với việc xây dựng các bao đóng phản xạ hoặc đối xứng. Vì vậy, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng việc tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ tương đương với việc xác định các cặp đỉnh trong đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ đó được nối chỉ bằng một đường đi. Nhìn chung giải quyết vấn đề này dựa trên việc xây dựng các thuật toán dùng để xác định các bao đóng bắc cầu thông qua các quan hệ liên thông.

1.3.2. Thuật toán xác định bao đóng bắc cầu

1.3.2.1. Thuật toán 1

Thuật toán 1. Xác định bao đóng bắc cầu

Function bao dong bac cau ($M_{\mathcal{R}}$: ma trận 0 - 1 $n \times n$) {

$A = M_{\mathcal{R}}$;

$B = A$;

for ($i = 2$; $i \leq n$; $i++$) {

$A = A \odot M_{\mathcal{R}}$; /* độ phức tạp là $n^2(2n-1)^*$ /

/* B là ma trận 0 – 1 biểu diễn quan hệ bắc cầu $\mathcal{R}^*$ */

$B = B \vee A$; /* độ phức tạp là $(n-1)n^2$ phép hợp*/ }

Chúng ta có thể dễ dàng tìm được số phép toán bit được dùng bởi thuật toán 1 để xác định bao đóng bắc cầu của một quan hệ. Tính các lũy thừa Boole $M_{\mathcal{R}}, M_{\mathcal{R}}^2, \dots, M_{\mathcal{R}}^n$ đòi hỏi phải tìm $(n-1)$ tích Boole của các ma trận không - một $n \times n$. Mỗi tích Boole này có thể tính được bằng cách dùng $n^2(2n-1)$ phép toán bit. Do đó, các tích này có thể tính được bằng cách dùng $n^2(2n-1)(n-1)$ phép toán bit.

Để tìm $M_{\mathcal{R}}^*$ từ các lũy thừa Boole bậc n của $M_{\mathcal{R}}$, ta cần phải tính $(n-1)$ phép hợp của các ma trận không - một. Tính mỗi hợp cần n^2 phép toán bit. Vì vậy, chúng ta cần $(n-1)n^2$ phép toán bit để tính các hợp. Do đó khi dùng thuật toán 1, số bước chúng ta sẽ thực hiện là $n^2(2n-1)(n-1) + (n-1)(n-1)n^2 = 2n^3(n-1)$,

tương ứng có thể nói độ phức tạp của thuật toán này là $O(n^4)$ các phép toán bit để tính ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của một quan hệ trên tập A gồm n phần tử.

Ví dụ 1.29. Tìm ma trận không - một biểu diễn bao đóng bắc cầu $\mathcal{R}$ ở ví dụ nêu trong bài toán?

Giải: Theo thuật toán tìm bao đóng bắc cầu chúng ta sẽ thực hiện lần lượt như sau,

Đầu tiên, chúng ta sẽ biểu diễn $\mathcal{R}$ bằng ma trận không - một như sau,

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theo thuật toán 1, ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu cần tìm chính là hợp của các ma trận không - một biểu diễn n lũy thừa đầu tiên của $\mathcal{R}$. Hay,

$$M_{\mathcal{R}^*} = M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{R}}^2 \vee M_{\mathcal{R}}^3 \vee M_{\mathcal{R}}^4 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Trong đó: } M_{\mathcal{R}}^2 &= M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{R}}^3 &= M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{R}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{R}}^4 &= M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{R}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Như vậy, theo (1) ta có,

$$M_{\mathcal{R}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tuy nhiên, một thuật toán khác hiệu quả hơn để xác định bao đóng bắc cầu.

1.3.2.2. Thuật toán Warshall

Thuật toán Warshall - gọi tắt của Spemphen Warshall được công bố năm 1960. Thuật toán 1 có thể tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ trên tập n phần tử với số bước thực hiện tính toán là $2n^3(n-1)$ phép toán bit. Tuy nhiên, bao đóng bắc cầu được tìm bằng thuật toán Warshall chỉ cần dùng $2n^3$ phép toán bit.

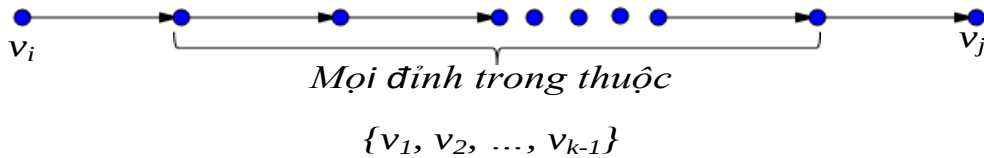
Thuật toán Warshall tính $M_{\mathcal{R}^*}$ bằng cách tính $W_0 = M_{\mathcal{R}}$, $W_1, \dots, W_n = M_{\mathcal{R}^*}$. Giả sử, cho $W_k = w_{ij}^k$ là ma trận không - một ở bước thứ k có phần tử mang giá trị 1 ở vị trí (i, j) nếu và chỉ nếu có một cạnh đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j với các đỉnh trong thuộc tập $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ thì phần tử ở bước thứ k được xác định như sau,

$$w_{ij}^k = w_{ij}^{k-1} \vee w_{ik}^{k-1} \wedge w_{kj}^{k-1},$$

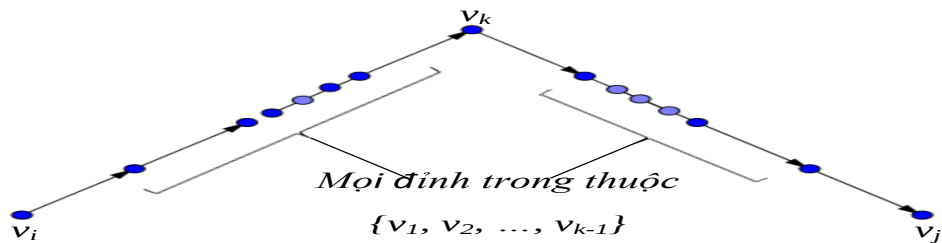
trong đó, i, j và k là các số nguyên không vượt quá n .

Điều này có nghĩa là hoặc một đường đi từ v_i đến v_j đã tồn tại trước khi v_k được phép như một đỉnh trong hoặc việc cho phép v_k như một đỉnh trong tạo ra một đường đi từ v_i đến v_k và sau đó từ v_k đến v_j . Hai trường hợp này được minh họa như sau,

Trường hợp 1,



Trường hợp 2,



Hình 1.17. Minh họa thuật toán Warshall

Đồng thời, thuật toán Warshall được biểu diễn như sau,

Thuật toán 2. Thuật toán Warshall

```
function Warshall(  $M_{\mathcal{R}}$ : ma trận không – một  $n \times n$  ){
   $W = M_{\mathcal{R}}$ ;
  for ( $k = 1; k \leq n; k++$ ) {
    for ( $i = 1; i \leq n; i++$ ) {
      for ( $j = 1; j \leq n; j++$ ) {
         $w_{ij} = w_{ij} \vee w_{ik} \wedge w_{kj}$ 
        /*  $W = w_{ij}$  là  $M_{\mathcal{R}^*}$  */
      }
    }
  }
}
```

Với cơ sở của thuật toán Warshall trên chúng ta có thể đánh giá rằng độ phức tạp của thuật toán chính là $O(n^3)$.

Ví dụ 1.30. Dựa trên ví dụ 1.29, hãy xác định bao đóng bắc cầu của quan hệ $\mathcal{R}$ áp dụng Thuật toán Warshall?

Giải: Đặt $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3, v_4 = 4$. W_0 là ma trận biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$. Do đó,

$$W_0 = M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W_1 có giá trị 1 ở vị trí (i, j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j và đường đi này có $v_1 = 1$ là đỉnh trong là $\{1\}$, nếu có. Theo thuật toán Warshall, ta có,

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W_2 có 1 ở vị trí (i, j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j và đường đi này có v_1 và/hoặc $v_2 = 2$ hay với các đỉnh trong chính là $\{1, 2\}$. Ta có,

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W_3 có 1 ở vị trí (i, j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong là $\{1, 2, 3\}$. Từ đó ta có,

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng, W_4 có 1 ở vị trí (i, j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong chính là $\{1, 2, 3, 4\}$. Từ đó,

$$W_4 = M_{\mathcal{H}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận M_4 chính là ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của $\mathcal{R}$.

1.4. Quan hệ n ngôi và ứng dụng

Có thể nói rằng, các mối liên quan giữa các phần tử của hơn hai tập cũng thường xuất hiện. Ví dụ, một mối liên quan giữa tên sinh viên, ngành học, và điểm trung bình của một sinh viên. Tương tự, cũng có mối liên quan giữa hãng xe ô tô, số hiệu chiếc xe, nơi sản xuất, nơi tiêu thụ, thời điểm xuất, thời điểm nhập của một chuyến xe. Một ví dụ khác trong chương trình tin học giả sử tìm số lớn nhất trong ba số, cụ thể hơn nữa là bài toán thể hiện mối liên quan giữa ba số nguyên, trong đó số thứ nhất lớn hơn số thứ hai, và số thứ hai lại lớn hơn số thứ ba.

Chúng ta sẽ nghiên cứu mối liên quan giữa các phần tử của hơn hai tập trong nội dung này. Những mối liên quan đó được gọi là **quan hệ n ngôi**. Những quan hệ này được dùng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu máy tính. Những biểu diễn đó giúp chúng ta trả lời những câu hỏi về các thông tin được lưu trữ trong cơ sở dữ liệu, chẳng hạn những chuyến bay nào sẽ hạ cánh xuống sân bay Quốc tế Đà Nẵng khoảng từ 1 giờ đến 5 giờ sáng? Những ai ở trường bạn là sinh viên năm hai, ngành Công nghệ thông tin hoặc ngành Kiến trúc và có điểm trung bình trên 3.0? Những nhân viên nào trong trường bạn làm việc dưới 5 năm và thu nhập trên 6 triệu đồng?

1.4.1. Định nghĩa quan hệ n ngôi

Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập. Một quan hệ n ngôi trên các tập chính là tập con của $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ được gọi là các miền của quan hệ đó, và n được gọi là bậc của nó.

Ví dụ 1.31. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ bao gồm các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên với $a < b < c$. Giả sử, lúc đó $(1, 2, 3) \in \mathcal{R}$, nhưng $(1, 3, 2) \notin \mathcal{R}$. Bậc của quan hệ là 3. Tất cả các miền của nó đều là tập các số nguyên.

Ví dụ 1.32. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ gồm các bộ bốn phần tử (A, S, D, T) biểu diễn các hãng xe tương ứng A là loại xe, S là thời gian sản xuất, D là giá xe, và T là thị trường tiêu thụ. Nếu hãng xe Toyota C - HR 2015 có giá bán là 500 triệu tại Việt Nam thì chúng ta sẽ xác định quan hệ tương ứng chính là $(\text{Toyota C - HR}, 2015, 500 \text{ triệu}, \text{Việt Nam})$ sẽ thuộc $\mathcal{R}$ và bậc là 4, với miền của nó là tập tất cả các loại xe, tập thời gian sản xuất, tập các giá bán và tập thị trường tiêu thụ...

1.4.2. Cơ sở dữ liệu và các quan hệ

Thời gian cần thiết để thao tác các thông tin trong một cơ sở dữ liệu tùy thuộc vào việc các thông tin đó đã được lưu trữ như thế nào. Các thao tác bổ sung, và xóa bớt các mẫu tin, hay cập nhật các mẫu tin, tìm các mẫu tin từ các cơ sở dữ liệu trùng lặp đều được thực hiện hàng triệu lần mỗi ngày trong cơ sở dữ liệu lớn. Có thể nói những thao tác này rất quan trọng nên người ta đã xây dựng nhiều phương pháp khác nhau trong việc biểu diễn các cơ sở dữ liệu. Chúng ta chỉ đề cập một trong các phương pháp và được gọi là **mô hình dữ liệu quan hệ** dựa trên khái niệm quan hệ. Một cơ sở dữ liệu xem như một tập các quan hệ. Mỗi quan hệ có thể biểu diễn như một bảng giá trị, mỗi dòng trong bảng biểu thị một tập các giá trị liên quan với nhau hay có thể nói nó chính là một mẫu tin gồm các bộ n phần tử tạo nên các **trường**. Các trường này chính là các đề mục của bộ n phần tử. Ví dụ, một mô hình dữ liệu biểu diễn **Sinh Viên** gồm bốn quan hệ minh họa như hình vẽ bên dưới.



Hình 1.18. Mô hình dữ liệu quan hệ **Sinh Viên**

Giả sử trong quan hệ **sinh viên**, các mẫu tin về **sinh viên** được biểu diễn dưới dạng các bộ 5 phần tử (MSN, Họ Tên, Ngành Học, Điểm trung bình, Môn), hay các bộ 4 phần tử như trong bảng **giảng viên**. Một cơ sở dữ liệu mẫu **giảng viên** gồm 3 mẫu tin được biểu diễn minh họa hình sau,

☐ Show all

Number of rows: 25

Filter rows:

Sort by key: None

+ Options

MSN

Họ Tên

Khoa

Môn

Edit

Copy

Delete

162010

Nguyễn Thị Thảo

Kinh Tế

Quản Trị Kinh Doanh

Edit

Copy

Delete

162012

Nguyễn Tất Phú Cường

Công Nghệ

Tin Đại Cương

Edit

Copy

Delete

232007

Phạm Anh Vĩnh

Kê Toán

Nguyên lý kê toán

Hình 1.19. Cơ sở dữ liệu **giảng viên**

Có nhiều phép toán trên các quan hệ n ngôi để tạo các quan hệ n ngôi mới như phép Insert, hay phép Update... Ở đây chúng ta sẽ xét hai phép toán cụ thể chính là phép chiếu và phép hợp. Phép chiếu tạo quan hệ n ngôi mới bằng cách xóa cùng một số trường trong mọi mẫu tin của quan hệ đó.

Định nghĩa 1.16. Phép chiếu $P_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m}$ ánh xạ bộ n phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tới bộ m phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, trong đó $m \leq n$.

Nói cách khác, phép chiếu $P_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m}$ xóa đi $n - m$ phần tử của bộ n phần tử, giữ lại các phần tử thứ i_1 , thứ $i_2, \dots$, thứ i_m .

Ví dụ 1.33. Tìm kết quả thực hiện phép chiếu $P_{1,4}$ đối với cơ sở dữ liệu giảng viên cụ thể hơn gồm các bộ 4 phần tử (162010, Nguyễn Thị Thảo, Kinh Tế, Quản Trị Kinh Doanh), (162012, Nguyễn Tất Phú Cường, Công Nghệ, Tin Đại Cương) và (232007, Phạm Văn Vĩnh, Kế Toán, Nguyên Lý Kế Toán)?

Giải: Phép chiếu $P_{1,4}$ ánh xạ các bộ 4 phần tử đó lần lượt được kết quả minh họa hình bên.

☐ Show all

Number of rows: 25

Filter rows:

Sort by key: None

+ Options

MSN

Môn

☐

162010

Quản Trị Kinh Doanh

☐

162012

Tin Đại Cương

☐

232007

Nguyên lý kế toán

Hình 1.20. Biểu diễn phép chiếu $P_{1,4}$ trên cơ sở dữ liệu.

Ngoài ra, một phép toán không kém phần quan trọng đó chính là phép hợp. Phép hợp được dùng để tổ hợp hai hoặc nhiều bảng thành một bảng khi các bảng này có cùng một số trường như nhau.

Định nghĩa 1.17. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ bậc m và S là quan hệ bậc n . Phép hợp $J_p(\mathcal{R}, S)$ với $p \leq m$ và $p \leq n$, là một quan hệ bậc $m + n - p$ chứa tất cả các bộ $(m + n - p)$ phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$, trong đó m bộ phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p)$ thuộc $\mathcal{R}$ và bộ n phần tử $(c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$ thuộc S .

Ví dụ 1.34. Tìm kết quả khi thực hiện phép hợp đối với các quan hệ cho trong cơ sở dữ liệu đối với giảng viên và sinh viên thể hiện minh như sau,

MSN	Họ Tên	Khoa	Môn
162010	Nguyễn Thị Thảo	Kinh Tế	Quản Trị Kinh Doanh
162012	Nguyễn Tất Phú Cường	Công Nghệ	Tin Đại Cương
232007	Phạm Anh Vĩnh	Kê Toán	Nguyên lý kế toán

MSN	Họ Tên	Ngành Học	Điểm trung bình	Môn
1209	Lưu Đoàn Dũng	Quản Trị Kinh Doanh	3	Tin Đại Cương
2316	Nguyễn Tuấn Anh	Thiết Kế Đồ Họa	3	Tin Đại Cương

Hình1.21. Dữ liệu giảng viên và sinh viên

Giải: Kết quả phép hợp từ hai cơ sở dữ liệu trên và được minh họa như hình bên dưới sau:

☐ Show all | Number of rows: 25 | Filter rows: Search this table | Sort by key: None

+ Options

msn	họ tên	môn
162010	Nguyễn Thị Thảo	Quản Trị Kinh Doanh
162012	Nguyễn Tất Phú Cường	Tin Đại Cương
232007	Phạm Anh Vĩnh	Nguyên lý kế toán
1209	Lưu Đoàn Dũng	Tin Đại Cương
2316	Nguyễn Tuấn Anh	Tin Đại Cương

Hình 1.22. Minh họa phép hợp J_2

1.5. Bài tập

1. Biểu diễn các quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$ dưới đây bằng các phương pháp còn lại (với các phần tử được liệt kê theo thứ tự tăng dần) sau.

- a. $\{(1,1), (1,3), (2,4), (3,2), (3,3), (4,3)\}$; b. $\{(1,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$;
 c. $\{(1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (3,3), (3,4)\}$; d. $\{(1,4), (1,3), (3,1), (4,1)\}$.

2. Liệt kê các cặp được sắp xếp trong các quan hệ trên $\{2, 3, 4\}$ tương ứng với các ma trận sau (trong đó các hàng và các cột tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng dần).

- a. $\begin{matrix} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & ; \end{matrix}$ b. $\begin{matrix} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; \end{matrix}$ c. $\begin{matrix} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . \end{matrix}$
 $\begin{matrix} & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

3. Làm cách nào để xác định một quan hệ có là phản xạ hay không thông qua ma trận biểu diễn quan hệ đó?

4. Cho R_1 và R_2 là các quan hệ trên tập A được biểu diễn bởi các ma trận cụ thể sau,

$$M_{R_1} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & \end{matrix} \text{ và } M_{R_2} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$$

Hãy tìm các ma trận biểu diễn cho,

- a. $R_1 \cup R_2$; b. $R_1 \cap R_2$; c. $R_2 \circ R_1$; d. $R_1 \circ R_2$.

5. Vẽ các đồ thị có hướng biểu diễn các quan hệ trong bài 2.

6. Cho R là một quan hệ trên tập $\{0, 1, 2, 3\}$ chứa các cặp có thứ tự $(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)$ và $(3, 0)$. Tìm,

- a. Bao đóng phản xạ của R ? b. Bao đóng đối xứng của R ?

7. Dùng thuật toán 1 để tìm bao đóng chuyển tiếp của các quan hệ trên $\{1, 2, 3, 4\}$.

- a. $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$;
 b. $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
 c. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
 d. $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.

8. Dùng thuật toán 1 để tìm bao đóng chuyển tiếp của các quan hệ sau đây trên $\{a, b, c, d, e\}$.

- $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$;
- $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$;
- $\{(a, b), (c, a), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$;
- $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$.

9. Dùng thuật toán Warshall để tìm bao đóng chuyển tiếp của các quan hệ trong các bài 7 và bài 8.

10. Vẽ các đồ thị có hướng biểu diễn các quan hệ trong bài 2.

11. Tạo một bảng dữ liệu **Sinhvien** gồm có 10 mẫu tin trong đó Massv làm khóa chính như sau,

Sinh vien(Massv, Hoten, ngaysinh, malop, phai).

Thực hiện các phép toán trên quan hệ dữ liệu này?

12. Hãy tạo một cơ sở dữ liệu QldiemSV gồm 2 bảng có các mẫu tin bên dưới như sau,

khoa	sinhvien
MAKHOA	HOSV
TENKHOA	TEN
	MASV
	NGAYSINH
	PHAI
	MAKHOA

Bảng cơ sở dữ liệu QldiemSV

MAKHOA	TENKHOA	HOSV	TEN	MASV	NGAYSINH	PHAI	MAKHOA
CD	CẦU ĐƯỜNG	LE VAN	TU	KT02	1998-09-12	NAM	KT
CT	CÔNG NGHỆ THÔNG TIN	NGUYỄN VĂN HẢI		TA04	1997-10-15	NAM	NN
KT	KIẾN TRÚC	TRAN MINH	SƠN	CT01	1997-09-05	NAM	CT
NN	NGOẠI NGỮ	VĂN THỊ HÀ	QUYÊN	TA02	1997-09-25	NỮ	NN
XD	XÂY DỰNG						

Bảng khoa

Bảng sinhvien

CHƯƠNG 2. LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Lý thuyết tổ hợp nghiên cứu việc phân bố các phần tử vào các tập hợp là một thành phần quan trọng của toán rời rạc. Chủ đề này đã được các nhà khoa học nghiên cứu từ rất lâu, vào thế kỷ thứ XVII, khi những câu hỏi về tổ hợp được nêu ra trong những công trình nghiên cứu các trò chơi may rủi, hay chẳng hạn dùng phép đếm để xác định độ phức tạp của thuật toán,... Thông thường các phần tử của tập hợp là hữu hạn và việc phân bố chúng phải thỏa mãn những điều kiện nhất định nào đó tùy theo yêu cầu của bài toán nghiên cứu.

Nhìn chung để giải quyết bài toán tổ hợp được dựa trên những nguyên lý đếm cơ sở đó chính là nguyên lý cộng, nguyên lý nhân và một số nguyên lý khác sẽ được nghiên cứu trong chương này.

Nhiều dạng bài toán điển hình mà lý thuyết tổ hợp đề cập đó là bài toán đếm, bài toán tồn tại và bài toán liệt kê.

Bài toán đếm. Đây là dạng bài toán nhằm trả lời câu hỏi “Có bao nhiêu cách phân bố đối tượng thỏa mãn điều kiện?”. Bài toán đếm được áp dụng có hiệu quả vào những công việc mang tính chất đánh giá như xác suất của một sự kiện, đánh giá độ phức tạp của thuật toán.

Bài toán liệt kê. Bài toán dạng này quan tâm đến tất cả các cách có thể sắp xếp được, vì vậy lời giải của nó biểu diễn dưới dạng thuật toán “**Vết cạn**” tất cả các cách sắp xếp. Hiện nay nhiều bài toán dạng tồn tại, hay bài toán đếm vẫn chưa có cách nào giải quyết ngoài sử dụng phương pháp bài toán liệt kê. Phương pháp liệt kê càng trở nên quan trọng khi nó được hỗ trợ bởi các hệ thống máy tính.

Bài toán tồn tại. Nếu như bài toán đếm được thực hiện bằng phương pháp đếm có bao nhiêu cách sắp xếp có thể có, hay bài toán liệt kê tức là liệt kê tất cả các cách có thể tồn tại, thì bài toán tồn tại lại giải quyết những vấn đề còn nghi vấn hay nghĩa là vấn đề đó có tồn tại cách phân bố hay không vẫn chưa xác định.

2.1. Một số nguyên lý đếm cơ bản

2.1.1. Nguyên lý cộng

Định nghĩa 2.1. Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể được thực hiện bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể tiến hành bằng n_2 cách. Nếu hai việc này không thể tiến hành đồng thời, khi đó số cách để giải quyết một trong hai công việc nêu trên là $n_1 + n_2$ cách.

Chúng ta có thể mở rộng quy tắc cộng cho trường hợp nhiều hơn hai công việc. Giả sử các công việc cần giải quyết là $T_1, T_2, \dots, T_m$ có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, \dots, n_m$ cách thực hiện và giả sử không có hai việc T_i, T_j nào làm đồng thời ($i, j = 1, m; i \neq j$). Khi đó số cách thực hiện một trong các công việc $T_1, T_2, \dots, T_m$ là: $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ cách.

Quy tắc cộng có thể được phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau,

- Nếu A và B là hai tập rời nhau ($A \cap B = \emptyset$), gọi $N(A \cup B)$ hay $A \cup B$ là tổng số phần tử thuộc tập A hoặc B thì,

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

(1)

- Nếu $A_1, A_2, \dots, A_m$ là những tập rời nhau thì,

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) &= N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_m) \\ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|. \end{aligned} \quad (2)$$

Ví dụ 2.1. Một đoàn vận động viên thể thao Việt Nam được cử đi thi đấu ở nước ngoài gồm 2 môn cử tạ và điền kinh. Nam có 24 người. Số vận động viên thi cử tạ (kể cả nam và nữ) là 48 người. Số vận động viên nữ thi điền kinh bằng số nam vận động viên thi cử tạ. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người?

Giải: Đoàn vận động viên được chia thành 2 tập, tập các vận động viên nam và tập các vận động viên nữ. Đồng thời, ta nhận thấy rằng tập vận động viên nữ lại được chia thành 2 tập là tập vận động viên nữ thi cử tạ và tập vận động viên nữ thi điền kinh. Theo giả thiết, số vận động viên nữ thi điền kinh bằng số nam vận động viên thi cử tạ. Như vậy, số nữ trong đoàn này chính là tổng số vận động viên thi cả 2 môn. Theo nguyên lý cộng, số người toàn đoàn vận động viên Việt Nam là,

$$24 + 48 = 72 \text{ (người).}$$

Ví dụ 2.2. Giả sử có một cán bộ khoa Tin hoặc một sinh viên đang học khoa Tin được chọn làm đại biểu tham dự trong hội đồng của một trường đại học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại diện này nếu khoa Tin có 27 cán bộ và 42 sinh viên?

Giải: Giả sử, gọi nhiệm vụ thứ nhất là việc lựa chọn cán bộ khoa Tin làm đại diện, số cách có thể thực hiện được đó là 27 cách. Nhiệm vụ thứ hai là việc lựa chọn sinh viên khoa Tin và có 42 cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn vị đại diện tham dự trong hội đồng của trường là: $27 + 42 = 69$ (cách).

Ví dụ 2.3. Một sinh viên có thể chọn bài tập máy tính từ một trong ba danh sách lần lượt 26, 18 và 29 bài. Hỏi có bao nhiêu cách chọn bài tập?

Giải: Số bài tập sinh viên có thể chọn từ danh sách thứ nhất là 26 cách, danh sách thứ hai là 18 cách và danh sách thứ ba là 29 cách. Như vậy, số cách chọn bài tập cho sinh viên từ một trong ba danh sách trên là $26 + 18 + 29 = 73$ (cách chọn).

Ví dụ 2.4. Trong một đợt phổ biến đề tài thi tốt nghiệp, ban chủ nhiệm khoa công bố danh sách đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề “*Xây dựng hệ thống thông tin quản lý*”, 10 đề tài về chủ đề “*Thiết kế phần mềm dạy học*” và 10 đề tài về chủ đề “*Hệ chuyên gia*”. Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

Giải: Số đề tài sinh viên có thể lựa chọn từ chủ đề thứ nhất đó là 80 cách, chủ đề thứ hai sẽ có tất cả là 10 cách chọn và cuối cùng chủ đề thứ ba sẽ là 10 cách chọn. Như vậy, số đề tài sinh viên có thể lựa chọn đó là: $80 + 10 + 10 = 100$ (cách).

Ví dụ 2.5. Hỏi giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình C sau được thực hiện?

```

n1 = 10;
n2 = 20;
n3 = 30;
k = 0;
for (i1 = 1; i1 <= n1; i1++) k = k + 1;
for (i2 = 1; i2 <= n2; i2++) k = k + 1;
for (i3 = 1; i3 <= n3; i3++) k = k + 1;

```

Giải: Giá trị khởi đầu của k bằng zero. Khối mã này gồm 3 vòng for khác nhau. Sau mỗi vòng lặp của một trong ba vòng for, giá trị của k tăng lên 1. Vòng for thứ nhất lặp 10 lần, vòng for thứ hai lặp 20 lần, và vòng for thứ ba lặp 30 lần. Vậy kết thúc ba vòng for giá trị của k sẽ là: $10 + 20 + 30 = 60$.

2.1.2. Nguyên lý nhân

Định nghĩa 2.2. Giả sử một thủ tục nào đó được tách thành hai công việc. Việc thứ nhất được thực hiện bằng n_1 cách, và tồn tại n_2 cách thực hiện hết việc thứ hai sau khi đã hoàn thành công việc thứ nhất. Khi đó, số cách để hoàn thành thủ tục này đó là: $n_1 \times n_2$ cách.

Nguyên lý nhân có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp sau: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các tập hữu hạn, thì số phần tử trong tích Đề - các của các tập này là tích của số lượng các phần tử trong mỗi tập thành phần. Từ quy tắc nhân có thể suy ra,

$$\begin{aligned} N A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m &= N A_m \times N A_2 \times \dots \times N A_1 \\ |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| &= |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_m|. \end{aligned} \quad (3)$$

Nếu $A_1 = A_2 = \dots = A_m$ thì $N A_1^m = N A_1^m$.

Ví dụ 2.6. Giá trị của k sẽ bằng bao nhiêu sau khi thực hiện đoạn chương trình sau,

```

k = 0;
for(i1 = 1; i1 <= n1; i1++)
  for(i2 = 1; i2 <= n2; i2++)
    for(i3 = 1; i3 <= n3; i3++)
      .
      .
      .
    for(im = 1; im <= nm; im++)
      k = k+1;

```

Giải: Giá trị khởi đầu của k là zero. Mỗi vòng lặp lồng nhau được thực thi, giá trị của k tăng thêm 1. Gọi T_i là việc thực thi vòng lặp thứ i, khi đó số lần vòng lặp là số cách thực hiện công việc $T_1, T_2, \dots, T_m$. Số lượng cách thực thi công việc T_j , với $j = 1, m$, là n_j vì vòng lặp thứ j được thực thi một lần ứng với mỗi số nguyên i_j nằm trong khoảng $1 \leq i_j \leq n_j$. Theo quy tắc nhân, có thể suy ra vòng lặp ghép được thực thi đó là $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$ lần và cũng chính là giá trị cuối cùng của k.

Ví dụ 2.7. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế của một giảng đường bằng một chữ cái và sau đó là một số nguyên nhỏ hơn 100. Bằng cách như vậy hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế có thể ghi nhãn khác nhau?

Giải: Thủ tục đánh dấu ghế gồm hai công việc, đầu tiên là một chữ cái và sau đó là một số nguyên nhỏ hơn 100. Vì ký tự gán nhãn đầu tiên là một chữ cái, như vậy số cách chọn chữ cái sẽ là 26 cách chọn. Tiếp tục việc thứ hai là chọn chữ số nhỏ hơn 100 nên số cách thực hiện sẽ là 100 cách chọn khác nhau.

Theo quy tắc nhân, số cách để đánh dấu cho một chiếc ghế là,

$$26 \times 100 = 2600 \text{ (cách).}$$

Ví dụ 2.8. *Phương án đánh số điện thoại* Dạng thức số điện thoại ở Bắc Mỹ được quy định trong phương án đánh số như sau. Một số điện thoại gồm có 10 chữ số được phân ra thành nhóm mã vùng gồm ba chữ số, nhóm mã chi nhánh gồm ba chữ số, và nhóm mã máy gồm bốn chữ số. Vì những nguyên nhân kỹ thuật báo hiệu, nên có những hạn chế nhất định đối với một số chữ số này. Để xác định dạng thức cho phép, người ta đặt X biểu thị cho chữ số có thể lấy giá trị bất kỳ từ 0 đến 9, đặt N là chữ số có thể lấy giá trị từ 2 đến 9, và Y là chữ số phải có giá trị 0 hoặc 1. Chúng ta sẽ thảo luận hai phương án đánh số tạm thời gọi là phương án cũ và phương án mới. Trong phương án cũ, dạng thức mã vùng, mã chi nhánh và mã máy lần lượt là NYX, NNX và XXXX. Trong phương án mới, dạng thức của mã này lần lượt là NXX, NXX và XXXX. Hỏi theo phương án cũ và phương án mới ở Bắc Mỹ có bao nhiêu số điện thoại khác nhau?

Giải: Số cách chọn chữ số đối với dạng thức của mã vùng NYX là,

$$8 * 2 * 10 = 160 \text{ (số)}.$$

Số cách chọn chữ số đối với dạng thức mã vùng NXX là,

$$8 * 10 * 10 = 800 \text{ (số)}.$$

Tương tự, số cách chọn chữ số đối với mã chi nhánh NNX là,

$$8 * 8 * 10 = 640 \text{ (số)}.$$

Số cách chọn chữ số đối với mã chi nhánh NXX là: $8 * 10 * 10 = 800$ (số).

Cuối cùng, số cách chọn chữ số đối với mã máy theo dạng thức XXXX là,

$$10 * 10 * 10 * 10 = 10000 \text{ (số)}.$$

Theo nguyên tắc nhân, số điện thoại ở Bắc Mỹ theo phương án cũ có là,

$$160 * 640 * 10000 = 1.024.000.000 \text{ (số)}.$$

Đồng thời, số điện thoại ở bắc mỹ theo phương án mới có là,

$$800 * 800 * 10000 = 6.400.000.000 \text{ (số)}.$$

Ví dụ 2.9. Tồn tại bao nhiêu xâu bit khác nhau có độ dài bằng 7?

Giải: Có thể chọn từng bit trong xâu 7 bit theo hai cách, vì mỗi bit có thể là 0 hoặc là 1. Do vậy, theo quy tắc nhân, ta có số xâu bit với độ dài bằng 7 là,

$$2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^7 = 128 \text{ (xâu bit)}.$$

Ví dụ 2.10. Có bao nhiêu biển đăng ký xe khác nhau nếu mỗi biển chứa một dãy ba chữ cái và tiếp theo là ba chữ số?

Giải: Số cách chọn đối với từng chữ cái trong biển đăng ký xe là 26 cách.

Đồng thời, số cách chọn đối với từng chữ số trong biển đăng ký xe là 10 cách.

Như vậy, số biển đăng ký xe khác nhau theo yêu cầu độ dài bằng 6 là,

$$26 * 26 * 26 * 10 * 10 * 10 = 17.576.000 \text{ (biển số)}$$

2.1.3. Nguyên lý bù trừ

Một số bài toán đếm phức tạp hơn được dựa vào nguyên lý tổng quát của nguyên lý cộng. Tức là, khi có hai công việc có thể được tiến hành đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện đối với cả hai công việc đó. Việc cộng số cách để thực hiện từng nhiệm vụ sẽ dẫn đến một kết quả đếm quá, vì các cách thực hiện cả hai công việc được đếm hai lần. Để đếm đúng số cách

thực hiện một trong hai công việc, ta thực hiện cộng số cách của từng công việc rồi trừ đi số cách để thực hiện cả hai công việc. Kỹ thuật này được gọi là **nguyên lý bù trừ**. Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này theo kiểu các tập hợp.

Định nghĩa 2.3. Cho A_1, A_2 là các tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn một phần tử của tập A_1 , và T_2 là việc chọn một phần tử của A_2 . Số cách để thực hiện hết công việc T_1 là $|A_1|$ và $|A_2|$ cách để thực hiện T_2 . Số cách để thực hiện hoặc T_1 hoặc T_2 là tổng số cách thực hiện trong hai công việc T_1 và T_2 , trừ đi số cách thực hiện cả T_1 lẫn T_2 nên chúng ta có,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ N(A_1 \cup A_2) &= N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Công thức (4) được mở rộng cho trường hợp nhiều tập như sau.

Định lý. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các tập hữu hạn. Khi đó,

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = N_1 - N_2 + \dots + (-1)^{m+1} N_m \quad (5)$$

Trong đó, N_k là tổng phần tử giao của k tập lấy từ m tập đã cho hay

$$N_1 = N A_1 + N A_2 + \dots + N A_m ; N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m). \quad (6)$$

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh công thức này bằng cách chứng tỏ rằng mỗi phần tử trong hợp này chỉ được đếm một lần bởi vế phải của công thức (4). Giả sử a là thành phần của đúng r tập trong số m tập đã cho $A_1, A_2, \dots, A_m$ với $1 \leq r \leq m$.

Giả sử xét trường hợp một thành phần tức là $a = 1$, phần tử này sẽ được đếm là $C(r, 1)$ lần bởi $\sum_{1 \leq i \leq r} |A_i|$. Với trường hợp hai thành phần hay $a = 2$, phần tử này sẽ được đếm là $C(r, 2)$ lần bởi $\sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j|$. Tóm lại, nó được đếm $C(r, r)$ lần bởi tổng gồm r tập A_i . Như vậy, phần tử này sẽ được đếm là,

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

lần bởi biểu thức ở vế phải của công thức trên. Mục đích của chúng ta là tính giá trị này,

$$\begin{aligned} &C(r, 0) - C(r, 0) + C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r) \\ &C(r, 0) - [C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - C(r, 3) + \dots - (-1)^{r+1} C(r, r)] \end{aligned} \quad (7)$$

Theo định lý nhị thức cho a là một số nguyên dương, khi đó,

$$\sum_{a=0}^r (-1)^a C_r^a = 0 \quad (8)$$

Hay (7) ta có, $C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - C(r, 3) + \dots - (-1)^{r+1} C(r, r) = 0$

$$C(r, 0) = C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r) = 1$$

Đồng thời (7), ta có $C(r, 0) - 0 = 1 - 0 = 1$ (đpcm).

Như vậy, mỗi phần tử $a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ được tính đúng 1 lần ở vế phải của công thức (4), điều đó đã chứng minh tính đúng đắn của công thức (4).

Ví dụ 2.11. Một lớp CNTT có 50 sinh viên giỏi tin học, 35 sinh viên giỏi toán học và 16 sinh viên giỏi cả tin và toán học. Hỏi sẽ có bao nhiêu sinh viên trong lớp này, nếu mọi sinh viên đều là hoặc giỏi tin học, hoặc giỏi toán học, hoặc giỏi cả hai môn này?

Giải: Gọi A là tập các sinh viên trong lớp CNTT giỏi tin học, và B là tập các sinh viên giỏi toán trong lớp. Lúc đó, $A \cap B$ là tập các sinh viên trong lớp giỏi cả

hai môn nói chung. Vì mọi sinh viên của lớp phải là hoặc giỏi tin học, hoặc giỏi toán học, hoặc giỏi cả hai môn tin và toán học, cho nên có thể suy ra số sinh viên trong lớp này là $|A \cup B|$. Do vậy,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 35 - 16 = 69 \text{ (sinh viên).}$$

Ví dụ 2.12. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 15 bắt đầu bởi 000 hoặc kết thúc bởi 111?

Giải: Gọi A là xâu nhị phân có độ dài bằng 15 bắt đầu bởi 000, và B là xâu nhị phân độ dài bằng 15 kết thúc bởi 111. Dễ dàng nhận thấy,

$$N(A) = N(B) = 2^{12} = 4096 \text{ (xâu)}, N(A \cap B) = 2^9 = 512 \text{ (xâu).}$$

Theo nguyên lý bù trừ ta có,

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 4096 + 4096 - 512 = 7680 \text{ (xâu).}$$

Ví dụ 2.13. Hỏi trong tập $X = \{1, 2, \dots, 1000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, và 7?

Giải: Gọi $A_i = \{x \in X \mid x \text{ chia hết cho } i\}$, $i = 3, 4, 7$. Khi đó, $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ là tập các số trong X chia hết cho 3 hoặc cho 4 hoặc cho 7, theo nguyên lý bù trừ ta có,

$$N(A_3 \cup A_4 \cup A_7) = N(A_3) + N(A_4) + N(A_7) - N(A_3 \cap A_4) - N(A_4 \cap A_7) - N(A_3 \cap A_7) + N(A_3 \cap A_4 \cap A_7)$$

$$\text{Ta có: } N(A_3) = \frac{1000}{3} = 333; N(A_4) = \frac{1000}{4} = 250; N(A_7) = \frac{1000}{7} = 142$$

$$N(A_3 \cap A_4) = \frac{1000}{3 \times 4} = 83; N(A_4 \cap A_7) = \frac{1000}{4 \times 7} = 35;$$

$$N(A_3 \cap A_7) = \frac{1000}{3 \times 7} = 47, N(A_3 \cap A_4 \cap A_7) = \frac{1000}{3 \times 4 \times 7} = 11.$$

Ta có:

$$N(A_3 \cup A_4 \cup A_7) = 333 + 250 + 142 - 83 - 35 - 47 + 11 = 571 \text{ (số).}$$

Như vậy, các số trong tập X không chia hết cho một trong các số 3, 4 hoặc 7 là,
 $1000 - 571 = 429 \text{ (số).}$

Ví dụ 2.14. Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 1000 và đồng thời chia hết cho 7 hoặc 11?

Giải: Gọi A là tập các số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 7, và B là tập các số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 11. Khi đó, số nguyên dương không lớn hơn 1000 và đồng thời chia hết cho 7 hoặc 11 là $|A \cup B|$.

Theo nguyên lý bù trừ ta có,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\text{Theo (1), ta có: } |A| = \frac{1000}{7} = 142; |B| = \frac{1000}{11} = 90.$$

$$|A \cap B| = \frac{1000}{7 \times 11} = 12.$$

Như vậy, $|A \cup B| = 142 + 90 - 12 = 220 \text{ (số).}$

Ví dụ 2.15. Giả sử trường đại học có 1.659 sinh viên mới vào học. Trong số đó, có 453 sinh viên đang theo học tại bộ môn tin học, 567 sinh viên đang học bộ môn kiến trúc, và 299 sinh viên đang theo học cả bộ môn tin học lẫn kiến trúc. Hỏi có

bao nhiêu sinh viên hoặc chưa học bộ môn tin học hoặc chưa học bộ môn kiến trúc của trường?

Giải: Gọi A là tập sinh viên đang theo học bộ môn tin học của trường đại học, theo vậy số sinh viên tập A sẽ là $|A| = 453$ sinh viên. Gọi B là tập sinh viên đang theo học bộ môn kiến trúc và số sinh viên của tập B sẽ là $|B| = 567$ sinh viên, đồng thời theo giả thiết số sinh viên đang học cả hai bộ môn này sẽ là $|A \cap B| = 299$ sinh viên. Theo nguyên lý bù trừ, ta có số sinh viên đang theo học hoặc bộ môn tin học hoặc bộ môn kiến trúc là,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721 \text{ (sinh viên).}$$

Như vậy, số sinh viên mới vào học hoặc chưa học bộ môn tin học hoặc chưa học bộ môn kiến trúc của trường là $1659 - 721 = 938$ (sinh viên).

Ví dụ 2.16. Viết công thức theo nguyên lý bù trừ tính số phần tử trong hợp của bốn tập.

Giải: Theo nguyên lý bù trừ ta có,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \\ &|A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &+ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

2.1.4. Nguyên lý quy nạp

2.1.4.1. Các bước chứng minh quy nạp

Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh cực kỳ quan trọng và chúng ta sẽ xem xét cách dùng quy nạp toán học như thế nào, đồng thời tại sao nó lại là một kỹ thuật chứng minh có giá trị. Tuy nhiên, nguyên lý quy nạp chỉ được dùng để chứng minh các kết quả thu được bằng một cách nào đó chứ không phải là một công cụ để phát hiện các công thức và các định lý.

Quy nạp toán học chứng tỏ rằng $P(n)$ đúng đối với mọi số nguyên dương n gồm hai bước:

1. *Bước cơ sở:* Chứng tỏ $P(1)$ đúng.

2. *Bước quy nạp:* Chứng tỏ $P(n) \rightarrow P(n+1)$ là đúng đối với mọi n nguyên dương.

Ở đây, mệnh đề $P(n)$ đối với mọi số nguyên dương cố định gọi là **giả thiết quy nạp**. Khi đã hoàn tất cả hai bước trong một chứng minh quy nạp toán học, chúng ta đã chứng minh rằng $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n , có nghĩa chúng ta đã chứng minh $\forall n P(n)$ là đúng.

Bằng cách biểu diễn dưới dạng một quy tắc suy luận, kỹ thuật chứng minh này có thể diễn đạt như sau:

$$[P(1) \wedge \forall n (P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall n P(n). \quad (9)$$

Công việc đầu tiên phải làm để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi n số nguyên dương là chứng minh $P(1)$ đúng. Công việc này chứng tỏ rằng một trường hợp cụ thể khi thay n bằng 1 trong $P(n)$ là đúng. Sau đó phải chứng tỏ rằng $P(n+1)$ không thể sai khi $P(n)$ đúng trong phép kéo theo. Có thể thực hiện được điều này bằng cách giả sử $P(n)$ đúng và chứng tỏ rằng *theo giả thiết này*, $P(n+1)$ cũng phải đúng.

Cụ thể hơn khi dùng quy nạp để chứng minh một định lý, trước hết chúng ta phải chứng tỏ $P(1)$ là đúng. Sau đó, chúng ta biết $P(2)$ đúng vì $P(1)$ kéo theo $P(2)$.

Tiếp theo, chúng ta biết $P(3)$ đúng vì $P(2)$ kéo theo $P(3)$. Tiếp tục theo cách này chúng ta có $P(n)$ đúng với mọi n nguyên dương. Ví dụ có một hàng người, người thứ nhất, người thứ hai, v.v... Một tin mật được báo cho người thứ nhất, và từng người cứ báo tin mật cho người tiếp theo trong hàng, nếu người đứng trước nghe được tin đó. Gọi $P(n)$ là mệnh đề người thứ n nghe được mật tin. Lúc đó, $P(1)$ là đúng vì tin mật được báo cho người thứ nhất, $P(2)$ đúng vì người thứ nhất báo tin mật cho người thứ hai;... Theo nguyên lý quy nạp, mọi người trong hàng đều biết tin mật.

2.1.4.2. Các ví dụ về cách chứng minh theo quy nạp toán học

Chúng ta sẽ nghiên cứu nhiều ví dụ khác nhau để minh họa cho phép chứng minh các định lý theo quy nạp toán học.

Ví dụ 2.17. Dùng quy nạp toán học để chứng minh bất đẳng thức $n < 2^n$ với mọi n nguyên dương.

Giải: Gọi $P(n)$ là mệnh đề $n < 2^n$.

Bước cơ sở: $P(0)$ là đúng vì $0 < 2^0 \Leftrightarrow 0 < 1$.

$P(1)$ là đúng vì $1 < 2^1 \Leftrightarrow 1 < 2$.

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ là đúng đối với n nguyên dương, tức là giả sử mệnh đề $P(n)$ là đúng. Chúng ta phải chứng tỏ rằng ở số hạng thứ $n + 1$ cũng đúng, tức là $P(n + 1)$ hay ta có mệnh đề $P(n)$ sau,

$$n + 1 < 2^{n+1} \Leftrightarrow n + 1 < 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow n + 1 < 2^n + 2^n \text{ là đúng.}$$

Chúng ta đã chứng tỏ được $P(n + 1)$ đúng, nghĩa là $n + 1 < 2^{n+1}$ dựa trên giả thiết $P(n)$ đúng.

Như vậy theo nguyên lý quy nạp, chúng ta đã chứng tỏ được $n + 1 < 2^{n+1}$ là đúng đối với tất cả các số nguyên dương n .

Ví dụ 2.18. Dùng phép quy nạp toán học để chứng minh rằng tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2 ?

Giải: Gọi $P(n)$ là mệnh đề “Tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2 ”.

Đầu tiên, chúng ta thực hiện bước cơ sở, tức là phải chứng tỏ được $P(1)$ đúng. Sau đó, chúng ta phải tiến hành bước quy nạp, tức là phải chứng tỏ được $P(n + 1)$ đúng khi $P(n)$ được giả sử là đúng.

Bước cơ sở: $P(1)$ phát biểu rằng tổng của một số nguyên dương lẻ đầu tiên là $1 = 1^2$. Điều này là đúng.

Bước quy nạp: Để thực hiện bước quy nạp, chúng ta phải chứng tỏ mệnh đề $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng đối với mọi n nguyên dương. Giả sử $P(n)$ đúng đối với một số nguyên dương n , tức là,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Chúng ta cần chứng tỏ rằng $P(n + 1)$ là đúng với điều kiện giả sử $P(n)$ đúng, tức là $P(n+1)$ như sau,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Hay về trái ta có: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$

$$= [n^2 + (2n + 1)] = (n + 1)^2 = VP.$$

Bước quy nạp kết thúc, điều phải chứng minh.

2.1.5. Nguyên lý Dirichlet (Chuồng chim)

Nguyên lý những cái lồng nhốt các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Cụ thể nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ. Nguyên lý này được phát biểu đầu tiên bởi nhà Toán học người Đức Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

Nguyên lý Dirichlet. Nếu đem xếp n đối tượng vào k cái hộp, thì luôn tìm được một cái hộp chứa không ít hơn n/k đối tượng.

Ví dụ 2.19. Trong số 367 người bao giờ cũng tìm được hai người có ngày sinh nhật giống nhau vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.

Ví dụ 2.20. Trong 100 người thì có ít nhất bao nhiêu người sinh cùng một tháng?

Giải: Xếp người sinh cùng một tháng vào một nhóm. Như vậy có tất cả 12 tháng. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một nhóm có không ít hơn $100/12 = 8.3 \dots$ nghĩa là có 9 người.

2.2. Đếm các hoán vị tổ hợp

Giả sử một đội bóng quần vợt có 10 cầu thủ. Huấn luyện viên cần chọn 4 cầu thủ để đi thi đấu ở một trường khác. Ngoài ra, ông còn phải chuẩn bị một danh sách thứ tự gồm 3 cầu thủ để đấu ba trận đơn. Trong mục này chúng ta sẽ xem xét và nghiên cứu các kỹ thuật đếm đối với các cách sắp xếp nhiều đối tượng khác nhau trong một tập hữu hạn.

2.2.1. Hoán vị

Định nghĩa 2.4. Cho một tập hợp X gồm n phần tử khác nhau ($n \geq 0$). Mỗi cách sắp xếp có thứ tự của n phần tử trong X được gọi là hoán vị. Số hoán vị của n phần tử được ký hiệu là $P(n)$.

Hay:
$$P(n) = n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n \quad (10)$$

Quy ước $0! = 1! = 1$.

Ví dụ 2.21. Liệt kê tất cả các hoán vị của $\{a, b, c\}$?

Giải: Số hoán vị của tập 3 phần tử là $P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$ hoán đổi vị trí đó là, $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Ví dụ 2.22. Cho tập hợp $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ có tất cả bao nhiêu hoán vị?

Giải: Số hoán vị có trong tập hợp trên với 7 phần tử là: $P_7 = 7! = 5.040$ cách hoán đổi.

Ví dụ 2.23. Trong phòng họp có 8 ghế ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 người ngồi trong phòng họp?

Giải: Số cách sắp xếp 8 người ngồi trên 8 ghế ngồi trong phòng họp tức là hoán vị 8 phần tử trên tập 8 chiếc ghế. Ta có: $P_8 = 8! = 40.320$ cách sắp xếp.

Ví dụ 2.24. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau?

Giải: Gọi số có năm chữ số khác nhau cần tìm là $\overline{abcde}$ trong đó $a \neq 0$. Như vậy số cách tìm tại vị trí a đối với các chữ số còn lại là 4 cách. Các vị trí còn lại từ b

đến e số cách sắp xếp sẽ là hoán vị của 4 chữ số còn lại và khác a hay $P_4 = 4! = 24$ cách.

Cuối cùng, theo nguyên tắc nhân số cách sắp xếp số tự nhiên có năm chữ số khác nhau từ tập năm phần tử trên là: $4 \cdot 24 = 96$ cách sắp xếp.

2.2.2. Chỉnh hợp

Định nghĩa 2.5. Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt ($n \geq 0$). Mỗi cách chọn ra k phần tử của X ($0 \leq k \leq n$) và sắp xếp có thứ tự được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử và được ký hiệu là A_n^k .

$$\text{Hay:} \quad A_n^k = \frac{n!}{n-k!} \quad (11)$$

$$\text{Nếu } k = n \text{ thì } A_n^k = P(n). \quad (12)$$

Ví dụ 2.25. Có bao nhiêu cách chọn người đoạt giải nhất, người đoạt giải nhì và người đoạt giải ba trong một cuộc thi có 80 người tham gia?

Giải: Số cách chọn 3 người đoạt giải theo thứ tự đã liệt kê trong một tập gồm 80 người chính là một chỉnh hợp chập 3 của 80. Theo công thức trên ta có,

$$A_{80}^3 = \frac{80!}{80-3!} = \frac{80!}{77!} = 78 \cdot 79 \cdot 80 = 492.960 \text{ cách chọn.}$$

Ngoài ra chúng ta có thể thực hiện một cách khác như bên dưới sau.

Số cách chọn người đoạt giải nhất là: $A_{80}^1 = \frac{80!}{80-1!} = 80$ cách chọn.

Số cách chọn người đoạt giải nhì là: $A_{79}^1 = \frac{79!}{79-1!} = 79$ cách chọn.

Số cách chọn người đoạt giải ba là: $A_{78}^1 = \frac{78!}{78-1!} = 78$ cách chọn.

Như vậy, số cách chọn 3 người đoạt giải theo thứ tự liệt kê là,

$$78 \cdot 79 \cdot 80 = 492.960 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 2.26. Có bao nhiêu cách chọn một người đoạt giải nhất, hai người đoạt giải nhì và ba người đoạt giải ba trong một cuộc thi có 90 người tham gia?

Giải: Số cách chọn 6 người đoạt giải theo thứ tự đã liệt kê trong tập có 90 người tức là một chỉnh hợp chập 6 của 90 ta có,

$$A_{90}^6 = \frac{90!}{90-6!} = \frac{90!}{84!} = 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90 = 432.824.515.200 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 2.27. Giả sử rằng có 8 vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc và người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra (tức là người nào cũng có thể nhận huy chương)?

Giải: Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập ba của tập hợp tám phần tử, ta có: $A_8^3 = \frac{8!}{8-3!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ cách trao huy chương.

Ví dụ 2.28. Giả sử rằng một thương nhân nữ định đi bán hàng tại 9 thành phố như Đà Nẵng, Sài Gòn, Hà Nội, Lai Châu, Quảng Đông, Viên Chăn, New York, Chicago, Băng Cốc. Người doanh nhân có thể bắt đầu cuộc hành trình của mình từ một thành phố nào đó, nhưng có thể đến tám thành phố khác theo bất kỳ thứ tự nào

mà chị ta muốn. Hỏi chị ta có thể đi qua tất cả các thành phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

Giải: Số lộ trình chị ta có thể đi qua tám thành phố còn lại tùy ý chính là một hoán vị với tám phần tử, ta có: $P_8 = 8! = 40.320$ lộ trình.

2.2.3. Tổ hợp

Định nghĩa 2.6. Cho tập X có n phần tử phân biệt ($n \geq 0$). Mỗi cách chọn ra k phần tử trong tập X ($0 \leq k \leq n$) được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k .

Hay:
$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad (13)$$

Ví dụ 2.29. Có 12 cuốn sách tin về nhiều môn học khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 cuốn sách tin như vậy?

Giải: Số cách chọn ra 5 cuốn sách tin như vậy là,

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5! (12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 2.30. Có bao nhiêu cách tuyển năm trong số mười cầu thủ của một đội quần vợt để đi thi đấu một trường khác?

Giải: Số cách chọn cầu thủ đi thi đấu chính là một tổ hợp chập 5 của 10 phần tử, ta có $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$ cách chọn.

Ví dụ 2.31. Một nhóm 30 người được đào tạo để trở thành nhà du hành vũ trụ thực hiện chuyến bay đầu tiên đến sao Hỏa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một phi đội gồm sáu người có nhiệm vụ đó (giả sử rằng sáu người đều làm cùng một công việc)?

Giải: Số cách chọn một phi đội gồm 6 người trong nhóm 30 người chính là một tổ hợp chập 6 của 30, theo công thức ta có,

$$C_{30}^6 = \frac{30!}{6! (30-6)!} = \frac{30!}{6!24!} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 593.775 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 2.32. Xác định số cách lựa chọn một hội đồng để triển khai môn toán rời rạc tại một trường đại học, nếu hội đồng gồm ba thành viên của khoa toán, bốn thành viên của khoa tin. Biết rằng khoa toán có chín thành viên và khoa tin có mười một thành viên?

Giải: Số cách chọn thành viên khoa toán trong hội đồng là: $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$ cách chọn.

Số cách chọn thành viên khoa tin là: $C_{11}^4 = 330$ cách chọn.

Như vậy, số cách chọn thành viên trong hội đồng triển khai môn toán rời rạc là,

$$C_9^3 \cdot C_{11}^4 = 84 \cdot 330 = 27.720 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 2.33. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có một tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác?

Giải:

Trường hợp 1. Chọn 1 nữ và 4 nam.

Số cách chọn nữ là: $C(5, 1) = 5$ cách chọn.

Số cách chọn 2 nam theo thứ tự là: $A_{15}^2 = 210$ cách chọn.

Số cách chọn nam là: $C(13, 2) = 78$ cách chọn.

Số cách chọn trường hợp này là: $5 \cdot 210 \cdot 78 = 81.900$ cách chọn.

Trường hợp 2. Chọn 2 nữ và 3 nam.

Số cách chọn nữ là: $C(5, 2) = 10$ cách chọn.

Số cách chọn 2 nam theo thứ tự là: $A(15, 2) = 210$ cách chọn.

Số cách chọn 1 nam là: $C(13, 1) = 13$ cách chọn.

Số cách chọn trường hợp 2 là: $10 \cdot 210 \cdot 13 = 27.300$ cách chọn.

Trường hợp 3. Chọn 3 nữ và 2 nam.

Số cách chọn nữ là: $C(5, 3) = 10$ cách chọn.

Số cách chọn 2 nam theo thứ tự là: $A(15, 2) = 210$ cách chọn.

Số cách chọn trong trường hợp 3 là: $10 \cdot 210 = 2.100$ cách chọn.

Như vậy, số cách lập tổ công tác cần tìm là: $81.900 + 27.300 + 2.100 = 111.300$ cách chọn.

2.3. Hệ thức truy hồi

Với các bài toán đếm, nếu không thể áp dụng những nguyên lý cơ bản để đếm các đối tượng khi đó một cách khác để giải quyết đó chính là chúng ta sẽ sử dụng hệ thức truy hồi để giải quyết.

2.3.1. Giới thiệu hệ thức truy hồi

Định nghĩa 2.7. Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n theo một hay nhiều số hạng k đứng trước của dãy, tức là $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ với mọi n nguyên và $n \geq n_0$, trong đó n_0 không âm.

Hay hệ thức truy hồi có dạng như sau: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_{n-k})$.

Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi đó.

Ví dụ 2.34. Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n = 2, 3, 4, \dots$, và giả sử $a_0 = 3, a_1 = 5$. Tìm a_2 và a_3 ?

Giải: Theo hệ thức truy hồi: $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, để xác định các số hạng a_2 và a_3 tức là,

- Với $n = 2$, ta có: $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$.
- Với $n = 3$, ta có: $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$.

Ví dụ 2.35. Tìm năm số hạng đầu tiên của hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu sau: $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}; a_0 = 1, a_1 = 2$.

Giải: Theo hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu, năm số hạng đầu tiên cần tìm là,

- Với $n = 2$, ta có: $a_2 = a_1 + 3a_0 = 2 + 3 \cdot 1 = 5$.
- Với $n = 3$, ta có: $a_3 = a_2 + 3a_1 = 5 + 3 \cdot 2 = 11$.
- Với $n = 4$, ta có: $a_4 = a_3 + 3a_2 = 11 + 3 \cdot 5 = 26$.
- Với $n = 5$, ta có: $a_5 = a_4 + 3a_3 = 26 + 3 \cdot 11 = 59$.
- Với $n = 6$, ta có: $a_6 = a_5 + 3a_4 = 59 + 3 \cdot 26 = 137$.

Ví dụ 2.36. Họ nhà thỏ và các số Fibonacci. Chúng ta hãy xem xét bài toán sau đây được Fibonacci đặt ra đầu tiên vào thế kỷ XIII trong tác phẩm của ông mang tên *Liber abaci*. Một cặp thỏ mới sinh (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo. Giả sử rằng một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy 2 tháng tuổi. Kể từ khi chúng tròn 2 tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một đôi thỏ con. Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau n tháng với giả sử các con thỏ là trường thọ?

Giải: Giả sử f_n là số cặp thỏ sau n tháng. Ta sẽ chỉ ra rằng $\{f_n\}$ là các số hạng của dãy Fibonacci.

Do đó, dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ với } n \geq 3, \text{ các điều kiện đầu của dãy } \{f_n\} \text{ là: } f_1 = 1 \text{ và } f_2 = 1.$$

Vì vậy, $\{f_n\}$ tức là số cặp thỏ trên đảo sau n tháng được cho bởi số Fibonacci thứ n . Hay,

- Số cặp thỏ tháng 3 có là: $f_3 = f_{3-1} + f_{3-2} \Leftrightarrow f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$ cặp.
- Số cặp thỏ tháng 4 có là: $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$ cặp.
- Số cặp thỏ tháng 5 có là: $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$ cặp.

Tháng	Số cặp thỏ sinh	Số cặp thỏ còn	Tổng số cặp thỏ
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	1+1	3	5

Bảng 2.1. Số Fibonacci họ nhà thỏ

2.3.2. Giải hệ thức truy hồi thuần nhất tuyến tính hệ số hằng số

Giải hệ thức truy hồi tức là tìm một công thức tường minh cho số hạng tổng quát $\{a_n\}$ mà không phải tính qua k phần tử trước đó. Có thể nói không có phương pháp chung để giải hệ thức truy hồi tổng quát nhưng phương pháp phổ biến đó chính là phương pháp sử dụng phương trình đặc trưng.

Phương trình đặc trưng của một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng là,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (14)$$

Trong đó $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số thực và $c_k \neq 0$.

Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số. Chú ý, $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$, khi,

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k} \quad (15)$$

Sau khi chia cả hai vế cho r^{n-k} và trừ vế phải cho vế trái chúng ta nhận được phương trình tương đương sau,

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0 \quad (16)$$

Do đó, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là nghiệm nếu và chỉ nếu r là nghiệm của phương trình trên. Phương trình này được gọi là **phương trình đặc trưng** của hệ thức truy hồi, nghiệm của nó gọi là **ng nghiệm đặc trưng** của hệ thức truy hồi.

Bây giờ chúng ta tập trung xem xét các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với phương trình đặc trưng sau,

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0 \quad (17)$$

Định lý 1. Nếu r_1 và r_2 là hai nghiệm phân biệt của (17) thì tồn tại duy nhất các hằng số α_1 và α_2 . Vậy nghiệm để thỏa hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ là,

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \quad (18)$$

Chú ý. Thay các điều kiện ban đầu a_i để tìm các hằng số

Ví dụ 2.37. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi,

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ với } a_0 = 2, a_1 = 7.$$

Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi trên có dạng sau,

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad (1')$$

Phương trình (1') là phương trình bậc hai, vì vậy nghiệm của (1') là $r_1 = -1, r_2 = 2$.

Theo định lý 1, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu,

$$a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 2^n, \text{ với } \alpha_1 \text{ và } \alpha_2 \text{ là các hằng số} \quad (2')$$

Từ các điều kiện đầu, suy ra,

$$a_0 = \alpha_1 (-1)^0 + \alpha_2 2^0 \Leftrightarrow 2 = \alpha_1 (-1)^0 + \alpha_2 2^0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \quad (3')$$

$$a_1 = \alpha_1 (-1)^1 + \alpha_2 2^1 \Leftrightarrow 7 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \quad (4')$$

Giải (3') và (4'), ta có: $\alpha_2 = 3; \alpha_1 = -1$.

Vậy (2') ta có: $a_n = (-1)^n + 3 \cdot 2^n$.

Ví dụ 2.38. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, với $a_0 = 0, a_1 = 1$.

Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi là,

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (5')$$

Ta có (5') là tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt là: $r_1 = 3, r_2 = 2$.

Theo định lý 1, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi,

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \Leftrightarrow a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n \quad (6')$$

Trong đó với các hằng số α_1 và α_2 nào đó. Từ các điều kiện đầu, (6') ta có,

$$a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 2^0 \Leftrightarrow 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (7')$$

$$a_1 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 2^1 \Leftrightarrow 1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \quad (8')$$

Từ (7') và (8'), ta có: $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = -1$.

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi (6') là $a_n = 3^n - 2^n$. (9')

Định lý 2. Nếu r là nghiệm kép của (17) thì tồn tại duy nhất các hằng số α_1 và α_2 . Vậy nghiệm để thỏa hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ là,

$$a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n \quad (19)$$

Ví dụ 2.39. Giải hệ thức truy hồi sau, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $a_0 = 1, a_1 = 3$.

Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi là: $r^2 - 4r + 4 = 0$ (10')

Ta có (10') là tam thức bậc hai và có hai nghiệm kép đó là $r_1 = r_2 = 2$.

Theo định lý 2 $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi,

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 n r_2^n \quad (11')$$

Với α_1 và α_2 là các hằng số. Từ các điều kiện đầu và (11') ta có,

$$a_0 = \alpha_1 * 2^0 + \alpha_2 * 0 * 2^0 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \quad (12')$$

$$a_1 = \alpha_1 * 2^1 + \alpha_2 * 1 * 2^1 \Leftrightarrow 3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad (13')$$

Từ (12') và (13'), do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi (11') là,

$$a_n = 2^n + \frac{1}{2} * n * 2^n \quad (14')$$

2.4. Các bài toán liệt kê

2.4.1. Phương pháp quay lui (đệ quy)

2.4.1.1. Nguyên lý chung

Để liệt kê tất cả các cấu hình $S = s_1 s_2 \dots s_k$ thuật toán giả sử đã có cấu hình con $s_1 s_2 \dots s_{i-1}$. Ở bước thử tìm giá trị cho s_i , $Try(i)$ duyệt qua mọi giá trị j đề cử được cho s_i và thực hiện bốn bước sau,

- $s_i = j$;
- <Thay đổi trạng thái>;
- Nếu đủ cấu hình ($i = k$) thì Print(S) ngược lại, gọi đệ quy để thử cho s_{i+1} , $Try(i+1)$;
- <Trả lại trạng thái cũ>;

Chương trình chính gọi $Try(1)$.

Lưu ý. Một số cấu hình không có hai bước b) và d).

Bài toán 8 hậu hòa bình (Niklaus Wirth)

Đặt 8 quân hậu trên bàn cờ vua 8x8 sao cho không có quân hậu nào “**ăn**” được quân hậu khác, hay nói khác đi không quân hậu nào có thể **di chuyển** theo nguyên tắc cờ vua.

Các khai báo,

- Bàn cờ: int S[8];

ý nghĩa: $S[i] = j \Leftrightarrow$ hàng i đặt hậu tại ô (i, j) .

- Các mảng cần đánh dấu,

int a[8], b[15], c[15];

$a[j] = \text{TRUE} \Leftrightarrow$ cột j còn trống.

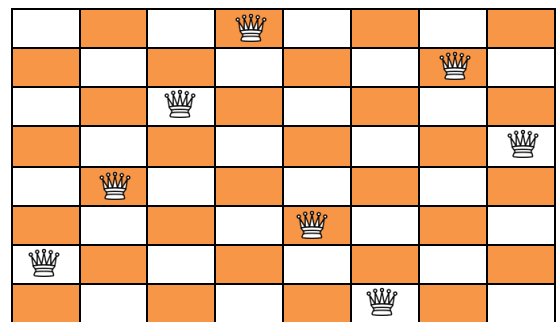
$c[i-j+7] = \text{TRUE} \Leftrightarrow$ đường chéo song song chéo chính qua ô (i, j) còn trống.

$c[i+j] = \text{TRUE} \Leftrightarrow$ đường chéo song song chéo

phụ qua ô (i, j) còn trống.

Trước khi gọi $Try(0)$ cần lấp đầy các mảng a,b,c giá trị 1 (TRUE).

Chương trình được cài đặt như sau.



Hình 2.1. Bài toán 8 hậu hòa bình

```
/*8 hau hoa binh*/
```

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
int S[8], a[8], b[15], c[15], sol=0;
void Try(int), Print();
void main(){
    int i;
    clrscr();
    for (i=0; i<8; i++) a[i]=1;
    for (i=0; i<15; i++) b[i]=1;
    for (i=0; i<15; i++) c[i]=1;
    Try(0);
    getch();
}
void Try(int i)
{ int j;
  for (j=0; j<8; j++) if (a[j]&& b[i-j+7]&& c[i+j]){
    S[i]=j;
    a[j]=0; b[i-j+7]=0; c[i+j]=0;
    if (i==7) print(); else Try(i+1);
    a[j]=1; b[i-j+7]=1; c[i+j]=1; }}
void Print()
{ int i;
  printf("\n%3d:", ++sol);
  for (i=0; i<8; i++) printf("%d ", S[i]);}
```

Kết quả sắp xếp với 8 con hậu sẽ có 92 phương án. Phương án đầu tiên mà chương trình tìm được ứng với $n = 8$ là $x_1 = (0, 4, 7, 5, 2, 6, 1, 3)$.

Bảng 2.2. Phương án sắp xếp 8 hậu

Dưới đây là cách xếp hậu ứng với một số giá trị n ,

n	4	7	8	9	10	11	12	13	14
H _n	2	40	92	352	724	2680	14200	73712	365596

Bảng 2.3. Phương án xếp hậu

2.4.1.2. Liệt kê chỉnh hợp lặp

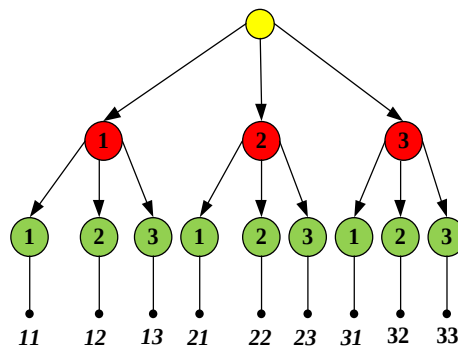
Không có hai bước b) và d).

Thuật toán như sau:

```
void Try(int i){
    int j;
    for (j=1; j<=n; j++){
        S[i]=j;
        if (i == k) print(); else Try(i+1); } }
```

Ví dụ 2.40. Hãy liệt kê các chỉnh hợp chập 2 của {1, 2, 3}.

Giải: Cây biểu diễn liệt kê chỉnh hợp lặp chập 2 từ tập {1, 2, 3} được cho trong hình sau với kết quả là 9 trường hợp.



Hình 2.2. Liệt kê chỉnh hợp lặp chập 2 của tập 3 phần tử

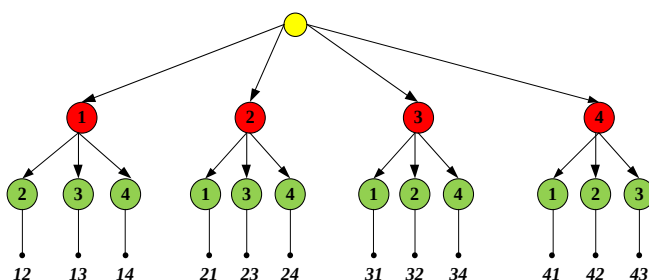
2.4.1.3. Liệt kê chỉnh hợp không lặp

Cần mảng a đánh dấu các giá trị j đã dùng, với ý nghĩa $a[j] = \text{TRUE} \leftrightarrow j$ chưa dùng.

```
void Try(int i){
    int j;
    for (j=1; j<=n; j++) if (a[j]){
        S[i]=j;
        a[j]=0;
        if (i == k) print(); else Try(i+1);
        a[j]=1; } }
```

Ví dụ 2.41. Liệt kê các chỉnh hợp không lặp chập 2 của tập {1, 2, 3, 4}?

Giải: Cây biểu diễn chỉnh hợp không lặp chập 2 của 4 phần tử được thể hiện hình bên dưới sau.



Hình 2.3. Liệt kê chỉnh hợp chập 2 của $\{1, 2, 3, 4\}$

2.4.1.4. Liệt kê tổ hợp

Tổ hợp là bộ không thứ tự. Liệt kê theo thứ tự tăng ($s_i < s_{i+1}$). Giá trị j đề cử được cho $s_i : 1 + s_i \leq j \leq n - k + i$. Chương trình chính gọi Try(1) nên mảng S có $S[0]=0$.

```
void Try(int i)
{
    int j;
    for (j=1+S[i-1]; j<=n-k+i; j++){
        S[i]=j;
        if (i == k) print(); else Try(i+1);    }
}
```

2.5. Bài tập

1. Viết chương trình tìm năm số hạng đầu tiên được xác định bởi hệ thức truy hồi và các điều kiện sau đây,

- a. $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$? b. $a_n = a_{n-1}^2$, $a_1 = 2$? c. $a_n = 7a_{n-1}^3$, $a_0 = 4$?
 c. $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$? d. $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$?
 e. $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$?

2. Giả sử $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$, với $n = 0, 1, 2, \dots$

- a. Tìm a_1 , a_2 , a_3 , và a_4 ?
 b. Viết chương trình tìm năm số hạng đầu tiên của hệ thức truy hồi trên?

3. Chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, nếu,

- a. $a_n = 0$? b. $a_n = 1$?
 c. $a_n = -4^n$? d. $a_n = 2 \cdot 4^n + 3$?

4. Dãy $\{a_n\}$ có là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ hay không, nếu,

- a. $a_n = 0$? b. $a_n = 1$?
 c. $a_n = 2^n$? d. $a_n = 4^n$?
 e. $a_n = n4^n$? f. $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n \cdot 4^n$?
 g. $a_n = (-4)^n$? h. $a_n = n^2 4^n$?

5. Viết chương trình tìm n số hạng đầu tiên của các hệ thức truy hồi trong mỗi trường hợp sau,

- a. $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$? b. $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$?
 c. $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$? d. $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$?
 e. $a_n = (n+1) \cdot a_{n-1}$, $a_0 = 2$? f. $a_n = 2 \cdot n \cdot a_{n-1}$, $a_0 = 3$?

g. $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7?$

6. Viết chương trình tìm n số hạng đầu tiên của hệ thức truy hồi và điều kiện đầu sau,

a. $a_n = 3a_{n-1}, a_0 = 2?$

b. $a_n = a_{n-1} + 2, a_0 = 3?$

c. $a_n = a_{n-1} + n, a_0 = 1?$

d. $a_n = a_{n-1} + 2 * n + 3, a_0 = 4?$

e. $a_n = 2a_{n-1} - 1, a_0 = 1?$

f. $a_n = 3a_{n-1} + 1, a_0 = 1?$

g. $a_n = na_{n-1}, a_0 = 5?$

h. $a_n = 2a_{n-1}, a_0 = 1?$

7. Tìm các hệ thức truy hồi bên dưới sau và xác định hệ thức nào là hệ thức tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

a. $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}?$

b. $a_n = 4na_{n-1} + a_{n-2}?$

c. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}?$

d. $a_n = 5a_{n-1} + 2?$

e. $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}?$

f. $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}?$

h. $a_n = a_{n-2}?$

8. Giải hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau,

a. $a_n = 2a_{n-1}$, với $n \geq 1, a_0 = 3?$

b. $a_n = a_{n-1}$, với $n \geq 1, a_0 = 2?$

c. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0?$

d. $a_n = \frac{a_{n-2}}{4}$, với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0?$

9. Viết hàm A(n) để tính a_n của các hệ thức truy hồi trong các bài 7, 8.

10. Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau,

a. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 3, a_1 = 6?$

b. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1?$

c. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 10?$

d. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 1?$

11. Tìm n số hạng đầu tiên của hệ thức truy hồi sau,

$$a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n * 4^n$$

Với $a_0 = -2, a_1 = 0$, và $a_2 = 5?$

12. Cho hệ thức truy hồi sau, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3$, với $a_0 = 1, a_1 = 4$. Hãy,

a. Viết hàm A(n) để tính a_n ?

b. Viết chương trình tìm 5 số hạng đầu tiên của a_n ?

13. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, với $n = 3, 4, 5, \dots$ và $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0$. Hãy,

a. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi a_n ?

b. Viết hàm A(n) để tính dãy $\{a_n\}$?

c. Viết chương trình tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy $\{a_n\}$?

14. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $a_0 = 3, a_1 = 10, a_2 = 32$. Hãy,

a. Tìm nghiệm của dãy $\{a_n\}$?

- b. Viết hàm $A(n)$ để tính dãy $\{a_n\}$?
- c. Viết chương trình tìm 10 số hạng đầu tiên của dãy?
15. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, biết $a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$. Hãy,
- a. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi a_n ?
- b. Viết hàm $A(n)$ để tính dãy $\{a_n\}$?
- c. Viết chương trình tìm n số hạng đầu tiên của hệ thức truy hồi a_n ?
16. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$. Trong đó, $a_0 = -5, a_1 = 4, a_2 = 88$. Hãy,
- a. Giải hệ thức truy hồi a_n ?
- b. Viết hàm $A(n)$ để tính dãy $\{a_n\}$?
- c. Viết chương trình tìm giá trị thứ n của hệ thức truy hồi trên?
17. Cho hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, với $a_0 = 5, a_1 = -9, a_2 = 15$. Hãy,
- a. Giải hệ thức truy hồi a_n ?
- b. Viết chương trình tìm n số hạng đầu tiên của hệ thức truy hồi a_n ?
18. Viết chương trình tính n giai thừa với n nguyên dương?
19. Viết chương trình tính giá trị của các đại lượng sau,
- a. $A(6, 3)$? b. $A(6, 5)$? c. $A(8, 1)$?
- d. $C(8, 8)$? e. $C(8, 0)$? f. $C(12, 6)$? g. $C(18, 6)$?
20. a. Có bao nhiêu thứ tự có thể xảy ra trong cuộc thi giữa 5 vận động viên?
- b. Viết chương trình liệt kê các trường hợp có thể xảy ra trong câu a?
21. a. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì, và thứ ba trong cuộc đua của 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự về đích đều có khả năng như nhau?
- b. Viết chương trình minh họa bài toán ở câu a?
22. a. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 2 số nguyên dương nhỏ hơn 100?
- b. Viết chương trình tính kết quả minh họa bài toán trên?
23. Một đội bóng gồm 13 người đang thi đấu. Hỏi,
- a. Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ ra sân?
- b. Có bao nhiêu cách chọn 10 trong 13 cầu thủ để cho mỗi người chơi ở một vị trí đã định?
- c. Trong 13 người, có 3 người là nữ. Vậy có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ ra sân, nếu ít nhất có một cầu thủ là nữ?
- d. Viết chương trình tìm kết quả ở các trường hợp nêu trên?
24. Một câu lạc bộ có 25 thành viên. Hỏi,
- a. Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?
- b. Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ của câu lạc bộ?
- c. Viết chương trình tìm kết quả ở mỗi trường hợp trên?

25. Viết chương trình tính tổng của n số nguyên dương chẵn đầu tiên?
- Tìm công thức tính tổng của n số nguyên dương chẵn đầu tiên?
 - Dùng quy nạp toán học chứng minh công thức tìm được trong câu a?
26. a. Viết chương trình tính công thức sau,
- $$3 + 3.5 + 3.5^2 + \dots + 3.5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4 \text{ khi } n \text{ là số nguyên không âm?}$$
- Dùng quy nạp toán học để chứng minh kết quả công thức trên?
27. Cho biểu thức toán học sau,
- $$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \text{ với mọi } n \text{ nguyên dương.}$$
- Viết chương trình tính công thức trên?
 - Dùng quy nạp toán học chứng minh công thức trên?
28. Cho công thức toán học sau: $n^3 - 7n - 12$ là không âm khi n là số nguyên lớn hơn 3.
- Viết chương trình tính giá trị biểu thức trên?
 - Dùng quy nạp toán học chứng minh biểu thức trên?
29. Có bao nhiêu phần tử có mặt trong $A_1 \cup A_2$ nếu có 17 phần tử trong A_1 , 41 phần tử trong A_2 và,
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
 - $|A_1 \cap A_2| = 1$?
 - $|A_1 \cap A_2| = 6$?
 - $A_1 \subseteq A_2$?
30. Viết chương trình minh họa cho mỗi trường hợp trong bài tập 1?
31. Trong một trường đại học có 345 sinh viên đã học toán cao cấp, 212 sinh viên đã học toán rời rạc, và 188 sinh viên đã học cả toán cao cấp lẫn toán rời rạc. Hỏi,
- Có bao nhiêu sinh viên đã học hoặc toán cao cấp hoặc toán rời rạc?
 - Viết chương trình tính kết quả bài toán trên?
32. Một cuộc điều tra mức sống các gia đình ở Mỹ cho biết 96% có ít nhất một cái TV, 98% có điện thoại và 95% có điện thoại đồng thời có ít nhất một TV. Tính tỉ lệ phần trăm các gia đình ở Mỹ không có điện thoại hoặc không có TV và viết chương trình minh họa bài toán?
33. Tìm các phần tử trong $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nếu mỗi tập có 100 phần tử và nếu,
- Các tập này từng cặp rời nhau?
 - Có 51 phần tử chung trong mỗi cặp tập và không có phần tử nào chung của cả ba tập?
 - Có 53 phần tử chung trong mỗi cặp tập và 25 phần tử chung của cả ba tập?
 - Các tập này bằng nhau?
 - Viết chương trình minh họa cho mỗi trường hợp trên?
34. Có 2.504 sinh viên tin học trong một trường đại học. Trong số đó có 1.876 sinh viên đã học Java, 999 sinh viên đã học Python, và 345 sinh viên học C. Hơn nữa ta còn biết 876 sinh viên đã học cả Java lẫn Python, 231 sinh viên đã học Python và C, và 290 sinh viên đã học Java và C. Nếu 189 sinh viên trong số sinh viên này đã học cả ba ngôn ngữ Java, Python và C thì hỏi,

a. Có bao nhiêu sinh viên trong 2.504 sinh viên đó chưa học môn nào trong ba ngôn ngữ lập trình kể trên?

b. Viết chương trình minh họa bài toán trên?

35. Trong một cuộc phỏng vấn có 270 sinh viên tham gia, người ta thấy có 64 người thích ăn cải xanh, 94 người thích ăn bắp cải, 58 người thích xúp lơ, 26 người thích cả cải xanh và bắp cải, 28 người thích cải xanh và xúp lơ, 22 người thích bắp cải và xúp lơ, và 14 người thích cả ba loại rau đó. Hỏi,

a. Có bao nhiêu người trong số 270 sinh viên này không thích loại nào trong ba loại rau kể trên?

b. Viết chương trình minh họa bài toán trên?

36. Tìm số lượng các số nguyên dương không lớn hơn 100 và đồng thời không chia hết cho 5 hoặc cho 7; và viết chương trình minh họa bài toán trên?

37. Có bao nhiêu phần tử hợp từ bốn phần tử nếu mỗi tập có 100 phần tử, mỗi cặp của các tập này có chung 50 phần tử, mỗi nhóm ba tập có chung 25 phần tử, và có 5 phần tử thuộc cả bốn tập; và viết chương trình minh họa bài toán?

38. a. Có bao nhiêu số hạng trong công thức tính số các phần tử trong hợp của 10 tập theo nguyên lý bù trừ?

b. Viết chương trình minh họa câu a với n nhập từ bàn phím?

39. a. Có bao nhiêu phần tử hợp từ 5 tập, nếu mỗi tập đó chứa 10.000 phần tử, mỗi cặp tập có 1.000 phần tử chung, mỗi bộ ba tập có 100 phần tử chung, mỗi bộ bốn tập có 10 phần tử chung, và có 1 phần tử thuộc cả năm tập?

b. Viết chương trình minh họa câu a?

40. a. Viết công thức tính theo nguyên lý bù trừ để xác định số phần tử hợp của sáu tập khi biết không có bộ ba tập nào trong các tập này có phần tử chung?

b. Viết chương trình xác định biểu thức trên với n, k nhập từ bàn phím?

41. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau?

42. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau, trong đó không có chữ cái nào lặp lại?

43. Có bao nhiêu xâu bit có độ dài bằng tám?

44. Có bao nhiêu xâu gồm năm ký tự ASCII, có chứa ít nhất một ký tự @? (Chú ý: có 128 ký tự ASCII)

45. Có bao nhiêu số nguyên dương bé hơn 1.000 sao cho,

a. Chia hết cho 7?

b. Chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 11?

c. Chia hết cho cả 7 lẫn 11?

d. Chia hết cho hoặc 7 hoặc 11?

e. Chia hết cho chỉ một trong hai số 7 và 11?

f. Không chia hết cho cả 7 lẫn 11?

g. Có các chữ số khác nhau?

h. Có các chữ số khác nhau và đều là số chẵn?

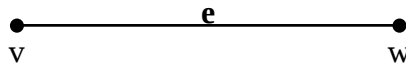
CHƯƠNG 3. ĐỒ THỊ

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị. Nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau có thể giải được bằng mô hình đồ thị. Chẳng hạn, có thể dùng đồ thị để biểu diễn sự cạnh tranh giữa các loài trong một môi trường sinh thái, để biểu diễn ai có ảnh hưởng lên ai trong một tổ chức nào đó, để biểu diễn các kết quả của cuộc thi đấu thể thao, cũng có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như tính số các tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không, hay để giải bài toán đi tham quan tất cả các thành phố sao cho mỗi thành phố đi qua đúng một lần, hoặc bài toán tìm số màu cần thiết để tô các vùng khác nhau trong một bản đồ.

3.1. Các khái niệm

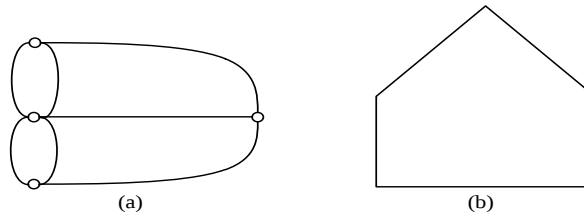
3.1.1. Đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng

Định nghĩa 3.1. Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cạnh, mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh (v, w) và không phân biệt thứ tự tại hai đỉnh đầu mút như hình sau,



Hình 3.1. Biểu diễn cạnh e của đồ thị vô hướng

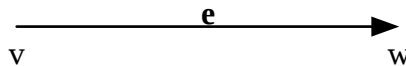
Ví dụ 3.1. Hình 3.2.a biểu diễn đồ thị 4 đỉnh và 7 cạnh. Hình 3.2.b là đồ thị 5 đỉnh và 5 cạnh.



Hình 3.2. Biểu diễn đồ thị vô hướng

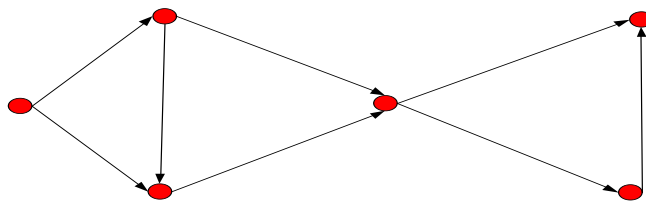
Định nghĩa 3.2. Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm một tập V các đỉnh và tập E các cạnh có hướng gọi là cung.

Mỗi cung $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh (v, w) có thứ tự như hình vẽ sau,



Hình 3.3. Biểu diễn cung e của đồ thị có hướng

Ví dụ 3.2. Hình 3.4 biểu diễn một đồ thị có hướng gồm 6 đỉnh và 8 cung.



Hình 3.4. Minh họa đồ thị $G(6, 8)$

Chú ý. Đồ thị vô hướng có thể coi là đồ thị có hướng trong đó mỗi cạnh $e = (v, w)$ tương ứng với hai cung (v, w) và (w, v) .

Cho đồ thị (có hướng hoặc vô hướng) $G = (V, E)$.

Nếu cạnh e liên kết đỉnh v, w thì ta nói cạnh e liên thuộc đỉnh v, w và các đỉnh v, w là đỉnh biên của cạnh e , và đỉnh v kề đỉnh w .

Nếu chỉ có duy nhất một cạnh e liên kết với cặp đỉnh v, w , ta viết $e = (v, w)$. Nếu e là cung thì v gọi là đỉnh đầu, và w gọi là đỉnh cuối của cung e .

Nếu có nhiều cạnh liên kết với cùng một cặp đỉnh thì ta nói đó là các cạnh song song.

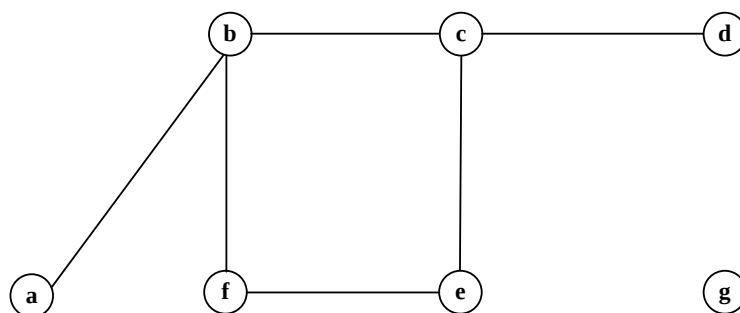
Cạnh có hai đỉnh liên kết trùng nhau gọi là khuyên.

Đỉnh không kề với đỉnh khác gọi là đỉnh cô lập.

Số đỉnh của đồ thị hay còn gọi là bậc của đồ thị; bậc của đỉnh v là số cạnh liên thuộc v , ký hiệu là $\deg(v)$ hay $\partial(v)$; số cạnh hoặc số cung của đồ thị gọi là cỡ của đồ thị. Với đồ thị có hướng, bậc ra (bậc vào) của đỉnh v là số cung liên thuộc đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là $\deg^+(v)$ ($\deg^-(v)$). Trên đồ thị vô hướng thì khuyên đếm bậc cho đỉnh 2 đơn vị.

Đồ thị có trọng số là đồ thị mà mỗi cạnh được gán cho một nhãn số. Ký hiệu $G = (V, E, w)$, w là trọng số của các cạnh. Cạnh e có nhãn k thì k gọi là *trọng số* hay *độ dài* của cạnh e . *Trọng số của đồ thị* là tổng trọng số của các cạnh trên đồ thị. *Độ dài của đường đi* là tổng trọng số của các cạnh trên đường đi.

Ví dụ 3.3. Xác định bậc của các đỉnh của đồ thị sau:

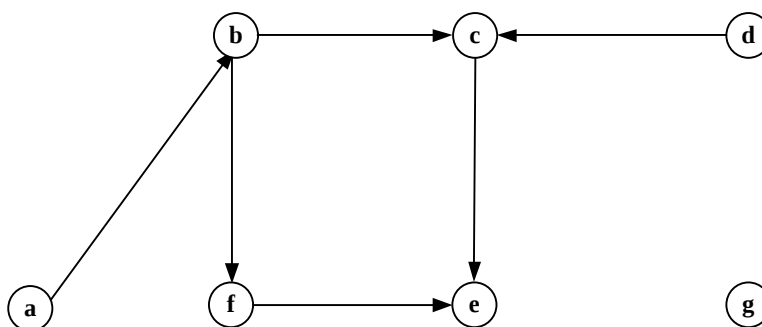


Hình 3.5. Đồ thị vô hướng $G(7, 6)$

$\deg(a) = 1$; $\deg(b) = 3$; $\deg(c) = 3$; $\deg(d) = 1$;

$\deg(e) = 2$; $\deg(f) = 2$; $\deg(g) = 0$.

Ví dụ 3.4. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị sau:



Hình 3.6. Đồ thị có hướng $G(7, 6)$

$\deg^+(a) = 1$; $\deg^-(b) = 1$, $\deg^+(b) = 2$; $\deg^+(c) = 1$, $\deg^-(c) = 2$;

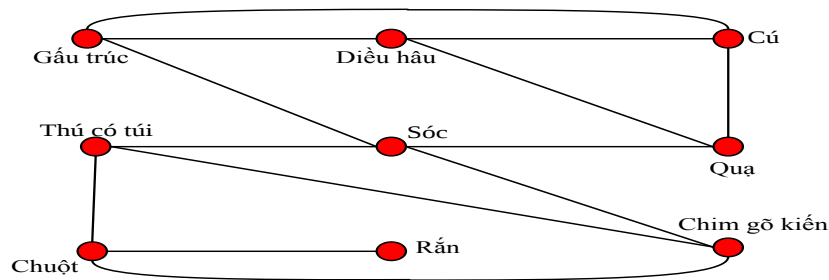
$$\deg^+(d) = 1; \deg^-(e) = 2; \deg^-(f) = 1, \deg^+(f) = 1; \deg^-(g) = \deg^+(g) = 0.$$

3.1.2. Các mô hình ứng dụng của đồ thị

Trong mục này chúng ta sẽ giới thiệu một số mô hình đồ thị từ các lĩnh vực ứng dụng khác nhau.

3.1.2.1. Đồ thị lấn tổ (Niche Overlap) trong sinh thái học

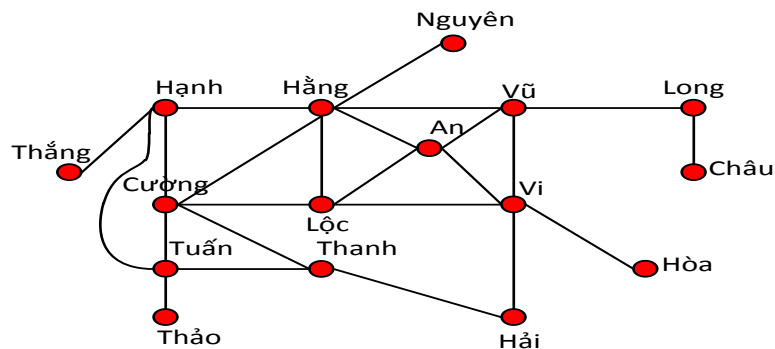
Đồ thị được dùng trong nhiều mô hình có tính đến sự tương tác của các loài vật. Chẳng hạn sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái có thể mô hình hóa bằng **đồ thị lấn tổ**. Mỗi loài được biểu diễn bằng một đỉnh. Mỗi cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bằng các đỉnh này là cạnh tranh với nhau (tức là, chúng cùng chung nguồn thức ăn). Đồ thị trên hình 3.7 là mô hình của hệ sinh thái rừng. Từ đồ thị này chúng ta thấy Sóc và Gấu trúc là cạnh tranh với nhau, còn Quạ và Chuột thì không.



Hình 3.7. Đồ thị lấn tổ

3.1.2.2. Đồ thị quen biết

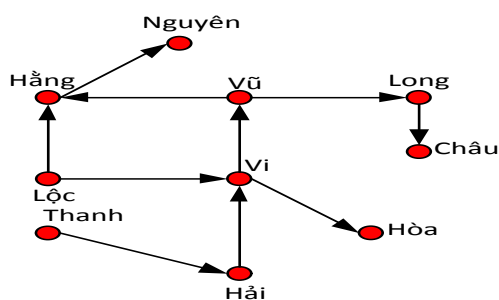
Chúng ta dùng mô hình đồ thị để biểu diễn mối quan hệ giữa mọi người với nhau. Ví dụ, dùng đồ thị để biểu diễn hai người có sự quen biết hay không. Mỗi người trong một nhóm người nào đó được biểu diễn bằng một đỉnh. Một cạnh vô hướng dùng để nối hai người nếu hai người quen nhau. Một đồ thị quen biết được biểu diễn trên hình 3.8.



Hình 3.8. Đồ thị quen biết

3.1.2.3. Đồ thị ảnh hưởng

Khi nghiên cứu tính chất của một nhóm người, ta thấy một số người có thể ảnh hưởng lên suy nghĩ của những người khác. Đồ thị có hướng được gọi là **đồ thị ảnh hưởng** có thể dùng để mô hình bài toán này. Khi một người được biểu diễn bằng đỉnh a có ảnh hưởng lên người được biểu diễn bằng đỉnh b thì giữa đỉnh a và đỉnh b được nối bằng một cạnh có hướng. Trên hình 3.9 biểu diễn đồ thị ảnh hưởng của các thành viên của một nhóm. Hằng ảnh hưởng đến Nguyên, Lộc và Thanh thì không ai ảnh hưởng lên anh ta.



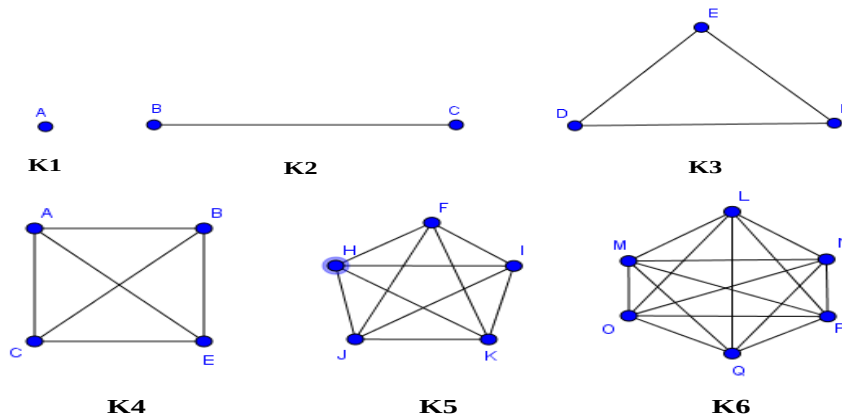
Hình 3.9. Đồ thị ảnh hưởng

3.1.3. Các đơn đồ thị đặc biệt

3.1.3.1. Đồ thị đầy đủ

Định nghĩa 3.3. Đồ thị đầy đủ n đỉnh kí hiệu K_n , là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.

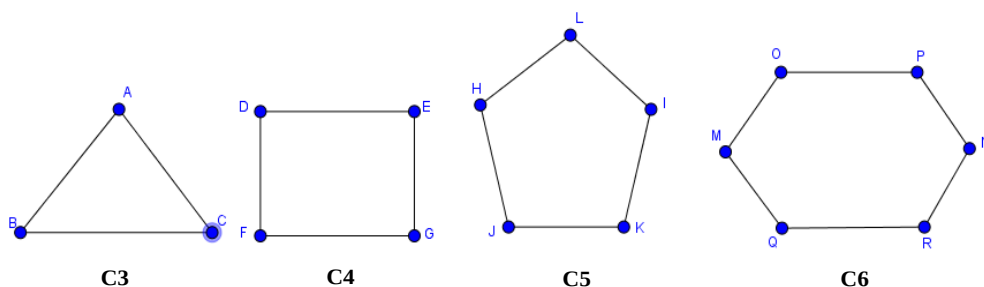
Các đồ thị K_n , với $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ được biểu diễn trên hình 3.10 bên dưới sau.

Hình 3.10. Các đồ thị K_n

3.1.3.2. Đồ thị vòng

Định nghĩa 3.4. Đồ thị vòng C_n , $n \geq 3$ là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh $v_1, v_2, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$.

Các vòng C_3, C_4, C_5 và C_6 biểu diễn trên hình bên dưới sau,



Hình 3.11. Các đồ thị vòng

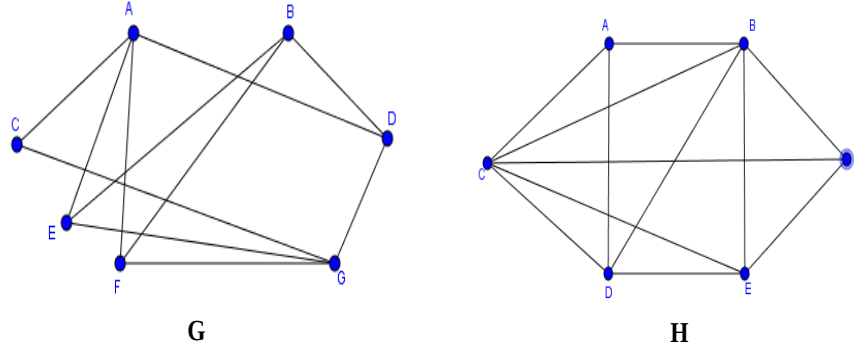
3.1.3.3. Đồ thị phân đôi

Định nghĩa 3.5. Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đồ thị phân đôi nếu tập các đỉnh V có thể phân thành hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2 .

3.1.3.4. Đồ thị phẳng

Định nghĩa 3.6. Một đồ thị có n đỉnh gọi là *đồ thị hình học phẳng* nếu nó được biểu diễn trên mặt phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau và được ký hiệu là K_n .

Ví dụ 3.5. Các đồ thị G, H trên hình 3.12 sau có là đồ thị phân đôi không?



Hình 3.12. Đồ thị vô hướng G và H .

Giải: Đồ thị G là đồ thị phân đôi, vì các đỉnh của nó là hợp của hai tập rời nhau $V_1 = \{a, b, g\}$ và $V_2 = \{c, d, e, f\}$, và mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của tập con này với một đỉnh của tập con kia.

Đồ thị H là đồ thị không phân đôi vì không thể chia tập các đỉnh của nó thành hai tập con sao cho các cạnh không được nối hai đỉnh của cùng một tập con.

3.2. Biểu diễn đồ thị

3.2.1. Biểu diễn bằng danh sách

Trong rất nhiều ứng dụng của đồ thị cách biểu diễn đồ thị dưới dạng *danh sách kề* là cách biểu diễn thích hợp nhất được sử dụng.

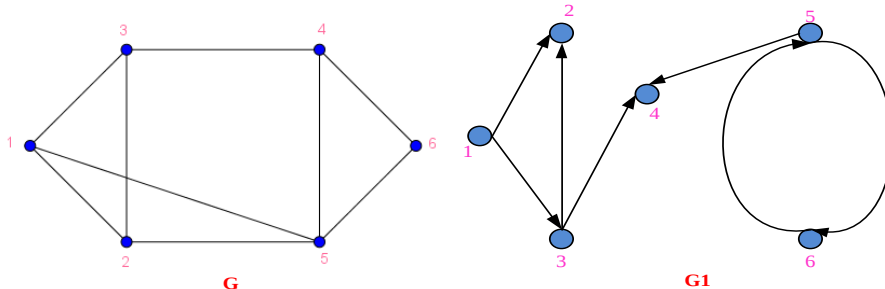
Trong cách biểu diễn này, với mỗi đỉnh v của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó, mà chúng ta sẽ ký hiệu là $Ke(v)$, tức là,

$$Ke(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$$

Khi đó vòng lặp thực hiện với mỗi phần tử trong danh sách này theo thứ tự các phần tử được sắp xếp trong đó sẽ được viết như sau,

for $u \in Ke(v)$ **do**
 {
 ...
 }

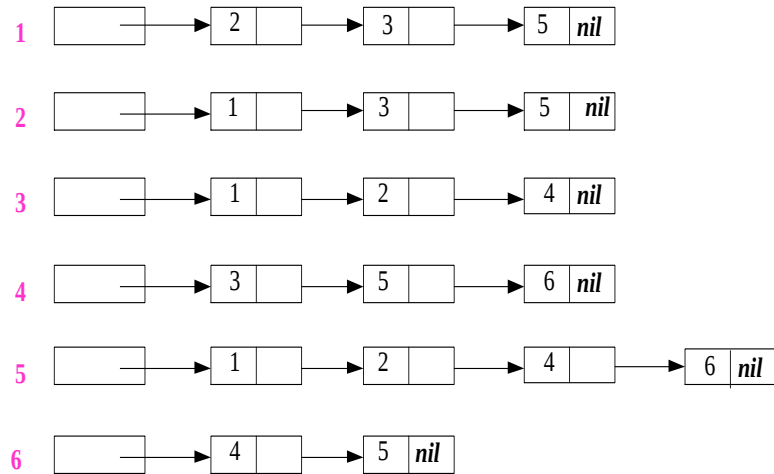
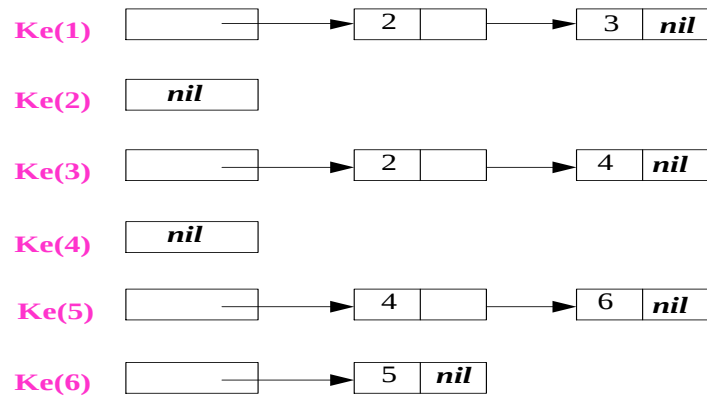
Ví dụ 3.6. Cho các đồ thị G và $G1$ như hình bên dưới sau, hãy biểu diễn danh sách kề của các đồ thị?



Hình 3.13. Biểu diễn đồ thị vô hướng G và đồ thị có hướng $G1$

Giải: Danh sách kề biểu diễn đồ thị vô hướng G như sau,

Đỉnh đầu

Hình 3.14. Biểu diễn đồ thị $G(6, 9)$ Danh sách kề biểu diễn đồ thị có hướng G_1 sau,Hình 3.15. Biểu diễn đồ thị $G_1(6, 7)$

Chương trình minh họa hình 3.13 được kết quả như sau

```

Ket qua danh sach ke doi voi do thi vo huong
1: 5->2->3->NiL
2: 5->3->1->NiL
3: 4->2->1->NiL
4: 6->5->3->NiL
5: 6->4->2->1->NiL
6: 5->4->NiL

Ket qua danh sach ke doi voi do thi co huong
1: 3->2->NiL
2: NiL
3: 4->2->NiL
4: NiL
5: 6->4->NiL
6: 5->NiL

```

Hình 3.16. Chương trình minh họa danh sách kề hình 3.13

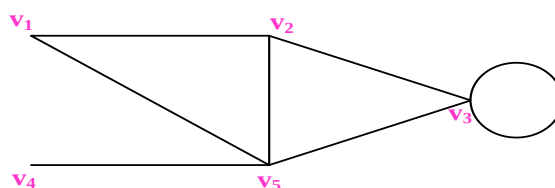
3.2.2. Biểu diễn bằng ma trận

3.2.2.1. Ma trận kề

Định nghĩa 3.7. Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có n đỉnh theo thứ tự $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ma trận kề của đồ thị G là ma trận vuông $A = a_{ij} \text{ } n \times n$, trong đó a_{ij} là số cạnh (khuyên) nối v_i với v_j . Lưu ý rằng, bậc của đỉnh mỗi khuyên được tính hai bậc.

Từ định nghĩa suy ra rằng ma trận kề của đồ thị vô hướng luôn đối xứng qua đường chéo chính.

Ví dụ 3.7. Cho đồ thị như hình bên dưới. Hãy biểu diễn ma trận kề của đồ thị này?



Hình 3.17. Đồ thị vô hướng $G(5, 7)$

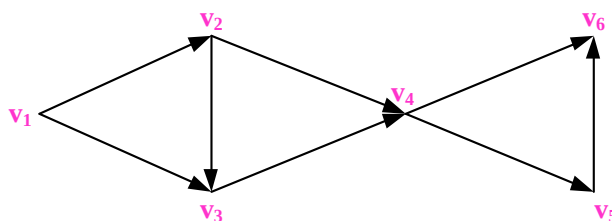
Giải: Theo định nghĩa 3.7, ta có ma trận kề là,

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	1
v_2	1	0	1	0	1
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0	1
v_5	1	1	1	1	0

Bảng 3.1. Biểu diễn ma trận kề $G(5, 6)$

Định nghĩa 3.8. Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có n đỉnh theo thứ tự $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ma trận kề của đồ thị G là ma trận vuông $A = a_{ij} \text{ } n \times n$, trong đó a_{ij} là số cung đi từ v_i đến v_j .

Ví dụ 3.8. Hãy biểu diễn ma trận kề của đồ thị có hướng sau,



Hình 3.18. Biểu diễn đồ thị có hướng $G(6, 8)$

Giải: Đồ thị trên có ma trận kề là,

Bảng 3.2. Biểu diễn ma trận kề $G(6, 8)$						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	1	0	0	0

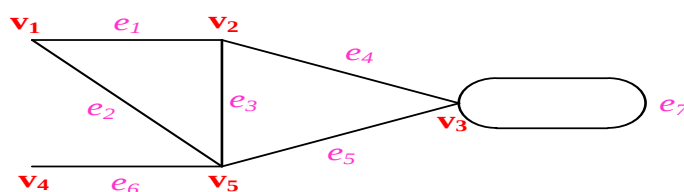
v_2	0	0	1	1	0	0
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_3	0	0	0	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	0	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	0

3.2.2.2. Ma trận liên thuộc

Định nghĩa 3.9. Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có n đỉnh, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và m cạnh $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc của đồ thị G là ma trận $A = a_{ij}$ $n \times m$ thỏa mãn,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ liên thuộc cạnh } e_j \\ 0, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ không liên thuộc cạnh } e_j \end{cases}$$

Ví dụ 3.9. Hãy biểu diễn ma trận liên thuộc đối với đồ thị vô hướng G được cho bởi hình bên dưới sau,



Hình 3.19. Biểu diễn đồ thị vô hướng $G(5, 7)$

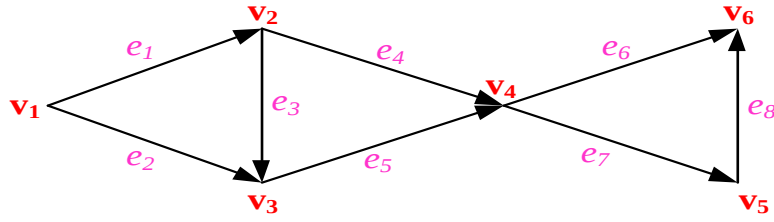
Giải: Ma trận liên thuộc biểu diễn đồ thị vô hướng G trên là,

Bảng 3.3. Biểu diễn ma liên thuộc $G(5, 7)$							
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0	0	1	0
v_5	0	1	1	0	1	1	0

Định nghĩa 3.10. Cho đồ thị có hướng không khuyên $G = (V, E)$ có n đỉnh, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và m cung $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc của đồ thị G là ma trận $A = a_{ij}$ $n \times m$ thỏa mãn,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \\ -1, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 0, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ không liên thuộc cung } e_j \end{cases}$$

Ví dụ 3.10. Xét đồ thị và hãy biểu diễn ma trận liên thuộc của đồ thị có hướng sau,



Hình 3.20. Biểu diễn đồ thị có hướng $G(6, 8)$

Giải: Ma trận liên thuộc của đồ thị hình trên là,

Bảng 3.4. Biểu diễn ma trận liên thuộc $G(6, 8)$								
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0
v_2	-1	0	1	1	0	0	0	0
v_3	0	-1	-1	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	-1	-1	1	1	0
v_5	0	0	0	0	0	0	-1	1
v_6	0	0	0	0	0	-1	0	-1

3.3. Đường đi trong đồ thị

3.3.1. Đường đi, chu trình, tính liên thông

Định nghĩa 3.11. Cho đồ thị $G = (V, E)$.

– Dây μ từ đỉnh v đến đỉnh w là tập hợp các đỉnh và cạnh nối tiếp nhau bắt đầu từ đỉnh v và kết thúc tại đỉnh w . Số cạnh trên dây μ gọi là độ dài của dây μ .

– Độ dài dây μ từ đỉnh v đến đỉnh w , với mỗi cạnh được gán một nhãn số được biểu diễn như sau:

$$\mu = (v, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, w)$$

trong đó v_i ($i = \overline{1, k-1}$) là các đỉnh trên dây và e_i ($i = \overline{1, k-1}$) là các cạnh trên dây liên thuộc đỉnh kề trước và sau nó. Các đỉnh và cạnh trên dây có thể lặp lại.

– Đường đi từ đỉnh v đến đỉnh w là dây từ đỉnh v đến đỉnh w , trong đó các cạnh không lặp lại.

– Đường đi sơ cấp là đường đi không đi qua một đỉnh quá một lần.

– Chu trình là đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

– Chu trình sơ cấp là chu trình không đi qua một đỉnh quá một lần.

– Dây có hướng trong đồ thị có hướng là dãy các đỉnh và cung nối tiếp nhau $e_1, e_2, \dots, e_k$ thỏa mãn đỉnh cuối của cung e_i là đỉnh đầu của cung e_{i+1} , $i = \overline{1, k-1}$.

– Đường đi có hướng trong đồ thị có hướng là dây có hướng, trong đó các cung không lặp lại.

– Đồ thị vô hướng gọi là liên thông, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều có đường đi nối chúng với nhau.

– Đồ thị có hướng gọi là liên thông mạnh, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều có đường đi có hướng nối chúng với nhau.

– *Đồ thị có hướng* gọi là liên thông yếu, nếu có đường đi giữa hai đỉnh bất kì của đồ thị vô hướng nền.

Do vậy, đồ thị có hướng là liên thông yếu nếu và chỉ nếu luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh khi ta không quan tâm tới hướng của các cạnh. Rõ ràng mọi đồ thị có hướng liên thông mạnh cũng là đồ thị liên thông yếu.

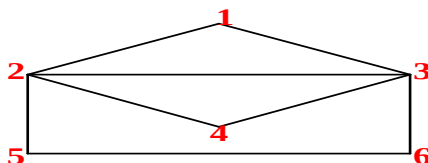
– *Chu trình Euler* là chu trình qua mọi cạnh và mọi đỉnh của đồ thị, mỗi cạnh không quá một lần.

– *Đường đi Euler* là đường đi qua mọi cạnh và mọi đỉnh của đồ thị, mỗi cạnh không quá một lần.

– *Chu trình có hướng Euler* là chu trình có hướng qua mọi cung và mọi đỉnh của đồ thị, mỗi cung không quá một lần.

– *Đường đi có hướng Euler* là đường đi có hướng qua mọi cung và mọi đỉnh của đồ thị, mỗi cung không quá một lần.

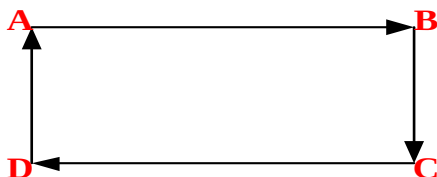
Ví dụ 3.11. Đồ thị



Hình 3.21. Đồ thị vô hướng $G(6, 8)$

Có chu trình Euler: $(1, 2, 4, 3, 6, 5, 2, 3, 1)$ hoặc $(1, 2, 4, 3, 2, 5, 6, 3, 1)$

Ví dụ 3.12. Cho đồ thị bên dưới sau,



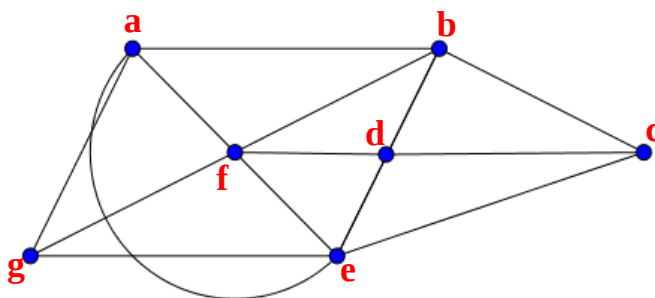
Hình 3.22. Đồ thị vô hướng $G(4, 4)$

có chu trình Euler là: (A, B, C, D, A)

– *Đường đi Hamilton* là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh một lần. *Đồ thị bán Hamilton* là đồ thị có đường đi Hamilton.

– *Chu trình Hamilton* là chu trình qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh một lần, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối. *Đồ thị Hamilton* là đồ thị có chu trình Hamilton.

Ví dụ 3.13. Xét đồ thị sau và cho biết đồ thị sau có chu trình Euler hay chu trình Hamilton?



Hình 3.23. Đồ thị vô hướng $G(7, 14)$

Đồ thị trên không có chu trình Euler vì các đỉnh g, c, e, f có bậc lẻ, nhưng có chu trình Hamilton

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow a$$

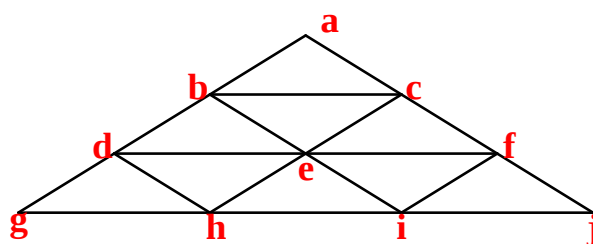
3.3.2. Thuật toán tìm chu trình Euler

Cho đồ thị $G = (V, E)$. Các bước tìm chu trình Euler C của G được mô tả như sau,

- Bước 1. Xuất phát từ v bất kỳ, xây dựng chu trình C .
- Bước 2. Xóa các cạnh trong C ra khỏi G và các đỉnh cô lập.
- Bước 3. Nếu $G = \emptyset$ thì C là chu trình Euler cần tìm.
- Bước 4. Tìm đỉnh chung v của C và G .
- Sắp xếp C bắt đầu từ v .
 - Xuất phát từ v tìm chu trình C' .
 - Nối C' vào C .

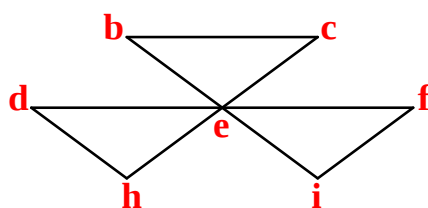
Quay lại *bước 2*.

Ví dụ 3.14. Cho đồ thị G như hình bên dưới và hãy tìm chu trình Euler C của G .



Hình 3.24. Đồ thị vô hướng $G(10, 18)$

Giải: Giả sử xuất phát từ đỉnh a , chu trình $C = \{a, b, d, g, h, i, j, f, c, a\}$. Đồ thị còn lại G_1 là,

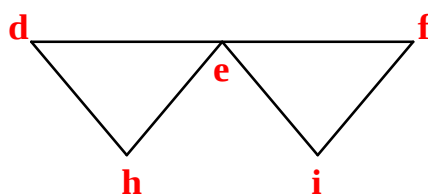


Hình 3.25. Đồ thị G_1 của chu trình Euler

C và G_1 có chung đỉnh b . Sắp xếp C bắt đầu từ b , $C = \{b, d, g, h, i, j, f, c, a, b\}$. Trên G_1 có chu trình bắt đầu từ b , $C_1 = (b, c, e, b)$.

Nối C_1 vào C ta có $C = \{b, d, g, h, i, j, f, c, a, b, c, e, b\}$.

Đồ thị còn lại G_2 ,



Hình 3.26. Đồ thị G_2 của chu trình Euler

C và G_2 có chung đỉnh d , sắp xếp C bắt đầu từ d , ta có,

$$C = \{ d, g, h, i, j, f, c, a, b, c, e, b, d \}.$$

Trên G_2 có chu trình bắt đầu từ d , $C_2 = (d, e, f, i, j, e, h, d)$. Nối C_2 vào C , ta có,

$$C = \{ d, g, h, i, j, f, c, a, b, c, e, b, d, e, f, i, e, h, d \}.$$

$G_3 = \emptyset$ thì C là chu trình Euler cần tìm. Hay,

$$C = \{ a, b, c, e, b, d, e, f, i, e, h, d, g, h, i, j, f, c, a \}.$$

3.3.3. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

3.3.3.1. Phát biểu bài toán

Cho đồ thị có trọng số $G = (V, E, w)$. Ký hiệu $w_{i,j}$ là trọng số của cạnh (i, j) . Độ dài đường đi

$$\mu = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n$$

là tổng các trọng số

$$L_\mu = \sum_{i=1}^n w_{v_{i-1}, v_i}$$

Cho hai đỉnh a, z . Bài toán đặt ra tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z .

3.3.3.2. Thuật toán Dijkstra

Thuật giải tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z trong đồ thị liên thông có trọng số. Trọng số của cạnh (i, j) là $w_{i,j} > 0$ và đỉnh x sẽ mang nhãn $L(x)$. Khi kết thúc thuật giải $L(z)$ chính là chiều dài ngắn nhất từ a đến z .

◇ *Đầu vào.* Đồ thị liên thông $G = (V, E, w)$ có trọng số $w_{i,j} > 0$ với mọi cạnh i, j , đỉnh a và đỉnh.

◇ *Đầu ra.* $L(z)$ chiều dài đường đi ngắn nhất từ a đến z , và đường đi ngắn nhất.

◇ *Phương pháp.*

(1) Gán $L(a) := 0$. Với mọi đỉnh $x \neq a$ gán $L(x) := \infty$. Ký hiệu $T := V$.

(2) Chọn $v \in T$ sao cho $L(v)$ có giá trị nhỏ nhất. Đặt,

$$T := T - \{v\}$$

(3) Nếu $z \notin T$, kết thúc. $L(z)$ là chiều dài đường đi ngắn nhất từ a đến z .

Từ z lần ngược theo đỉnh được ghi nhớ ta có đường đi ngắn nhất.

Ngược lại sang bước (4).

(4) Với mỗi $x \in T$ kề v gán,

$$L(x) := \min\{L(x), L(v) + w(v, x)\}$$

Nếu $L(x)$ thay đổi thì ghi nhớ đỉnh v cạnh đỉnh x để sau này xây dựng đường đi ngắn nhất.

Quay về bước (2).

Hay thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh bất kỳ a đến tất cả các đỉnh còn lại của đồ thị được mô tả chi tiết như sau:

Thuật toán Dijkstra (a): // $a \in V$ là một đỉnh bất kỳ của $G = (V, E)$

{

Bước 1 (Khởi tạo)

$L(a) := 0$; // gán nhãn của đỉnh s là 0

```

T := S - {a}; //T là tập đỉnh có nhãn tạm thời
for (v ∈ V) { //sử dụng a để gán nhãn cho các đỉnh còn lại
    L(a) := C[a][v];
    truooc[v] := a; }

```

Bước 2 (Lặp)

```

While (T ≠ ∅) {
    Tìm đỉnh u ∈ T sao cho d[u] := min(d[z]|z ∈ T);
    T := T \ {u}; //cố định nhãn đỉnh u
    for (v ∈ T) {
        if(d[v] > d[u] + A[u][v]) {
            d[v] := d[u] + A[u][v]; //gán lại nhãn cho đỉnh v
            truooc[v] := u; }}}

```

Bước 3 (Trả lại kết quả)

```

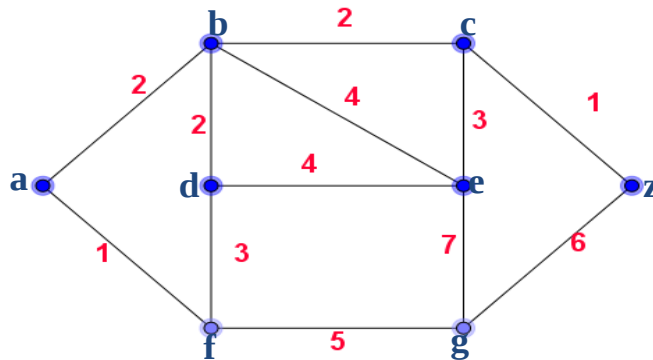
return (d[a], truooc[a]); }

```

- Định lý 1. Thuật toán Dijkstra là đúng.
- Định lý 2. Giả sử G là đồ thị liên thông có trọng số và có n đỉnh. Gọi f(n) là số lần thuật toán Dijkstra khảo sát một cạnh của G trong trường hợp xấu nhất. Khi đó ta có

$$f(n) = O(n^2).$$

Ví dụ 3.15. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z trong đồ thị G sau,



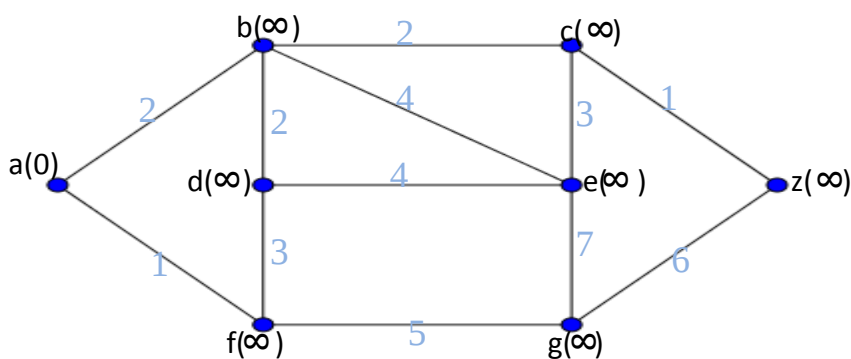
Hình 3.27. Đồ thị vô hướng G(8, 11)

– Thực hiện bước 1:

Đặt $T := \{a, b, c, d, e, f, g, z\}$

và $L a := 0, L b = L c = L d = L e = L f = L g := \infty.$

Các tham số được biểu diễn trên đồ thị như sau,



Hình 3.28. Cập nhật nhãn đồ thị vô hướng $G(8, 11)$

Các số trong ngoặc là $L(x)$, $x \in T$.

– Thực hiện bước 2,

$$L a = \min L x \mid x \in T = 0$$

Như vậy, chúng ta được kết quả sau,

$$T := T - a = \{b, c, d, e, f, g, z\}$$

– Thực hiện bước 3, Vì $z \in T$, sang bước 4.

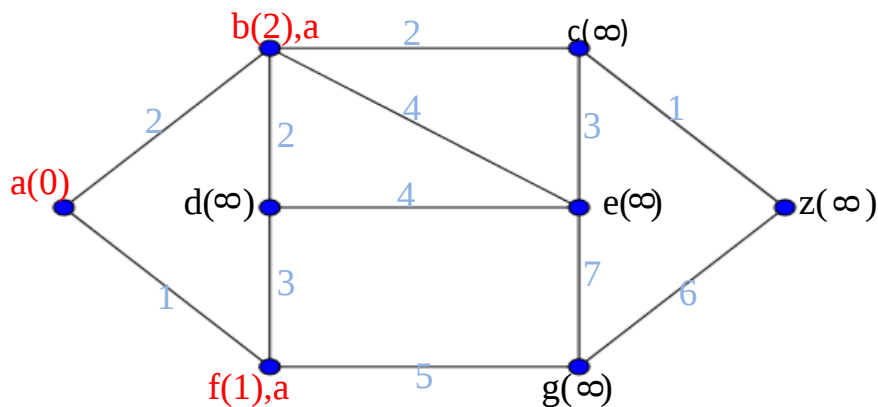
– Thực hiện bước 4,

Đỉnh b và f kề đỉnh a. Ta có,

$$L b = \min L b, L a + 2 = \min \infty, 2 = 2$$

$$L f = \min L f, L a + 1 = \min \infty, 1 = 1$$

Các đỉnh khác không thay đổi. Đồ thị có các nhãn như sau,



Hình 3.29. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh a

– Thực hiện bước 2,

$$L f = \min L x \mid x \in T = 1$$

suy ra

$$T = T - f = \{b, c, d, e, g, z\}$$

– Thực hiện bước 3, $z \in T$, sang bước 4.

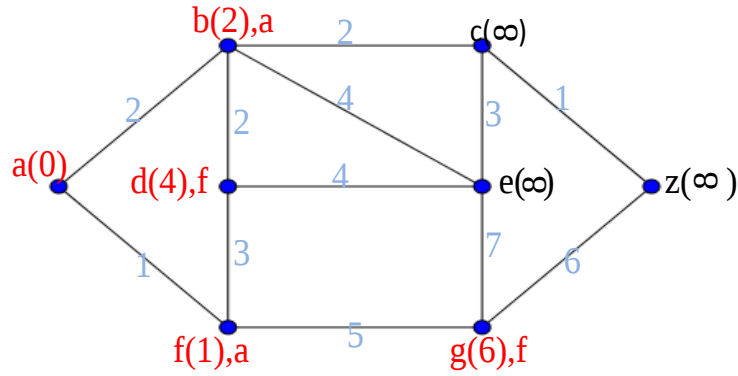
– Thực hiện bước 4,

Đỉnh d và g kề đỉnh f. Ta có,

$$L d = \min L d, L f + 2 = \min \infty, 1 + 2 = 3$$

$$L g = \min L g, L f + 5 = \min \infty, 1 + 5 = 6$$

Các đỉnh khác không thay đổi. Đồ thị có nhãn như sau,



Hình 3.30. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh f

– Thực hiện bước 2,

$$L b = \min L x \quad x \in T = 2$$

suy ra

$$T = T - b = \{c, d, e, g, z\}$$

– Thực hiện bước 3, $z \in T$, sang bước 4.

– Thực hiện bước 4,

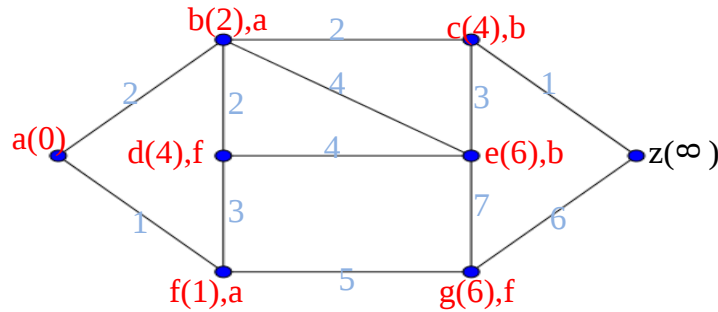
Đỉnh c, d và e kề với b . Ta có,

$$L c = \min L c, L b + 2 = \min \infty, 2 + 2 = 4$$

$$L d = \min L d, L b + 2 = \min 4, 2 + 2 = 4$$

$$L e = \min L e, L b + 4 = \min \infty, 2 + 4 = 6$$

Các đỉnh khác không thay đổi. Đồ thị có nhãn như sau,



Hình 3.31. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh b

– Thực hiện bước 2,

$$L c = \min L x \quad x \in T = 4$$

suy ra

$$T = T - c = \{d, e, g, z\}$$

– Thực hiện bước 3, $z \in T$, sang bước 4.

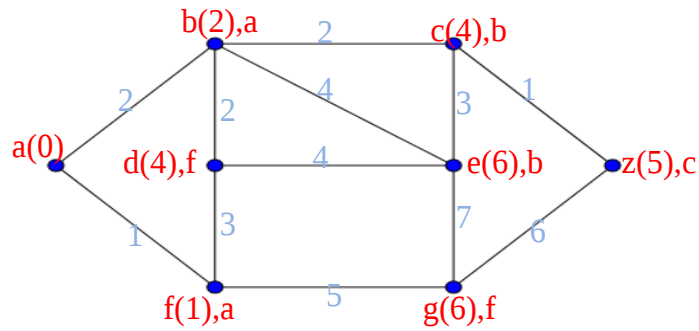
– Thực hiện bước 4,

Đỉnh e và z kề với đỉnh c . Ta có,

$$L e = \min L e, L c + 3 = \min 6, 4 + 3 = 6$$

$$L z = \min L z, L c + 1 = \min \infty, 4 + 1 = 5$$

Các đỉnh khác không thay đổi. Đồ thị có nhãn như sau,



Hình 3.32. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh c

- Thực hiện bước 2,

$$L_d = \min L_x \mid x \in T = 4$$

suy ra

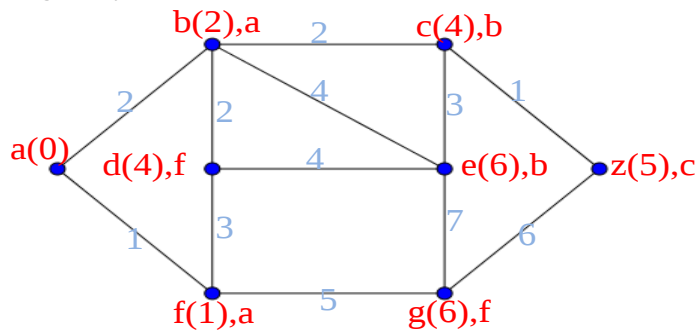
$$T = T - d = \{e, g, z\}$$

- Thực hiện bước 3, $z \in T$, sang bước 4.
- Thực hiện bước 4.

Đỉnh e kề đỉnh d. Ta có,

$$L_e = \min L_e, L_d + 4 = \min 6, 4 + 4 = 6$$

Các đỉnh khác không thay đổi. Đồ thị có nhãn như sau,



Hình 3.33. Nhãn đồ thị $G(8, 11)$ kề đỉnh d

- Thực hiện bước 2,

$$L_z = \min L(x \mid x \in T) = 5$$

suy ra

$$T = T - z = \{e, g\}.$$

- Thực hiện bước 3, $z \notin T$. Kết thúc.

$L(z) = 5$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến z.

Từ z lần ngược lại theo các đỉnh đã được ghi nhớ $z \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$. Ta suy ra được đường đi ngắn nhất là,

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow z.$$

Ngoài ra một cách khác chính là sử dụng phương pháp lập bảng ghi nhãn. Tức là, ta lập bảng tính toán các nhãn gồm các cột ứng với các đỉnh, và các hàng ứng với các lần tính nhãn ở bước (4). Các nhãn gạch dưới ứng với nhãn nhỏ nhất ở bước (2), và đỉnh bị loại được ghi bên phải.

Sau khi đỉnh z bị loại, từ z ta lần ngược về đỉnh a theo nhãn ghi trên bảng. Các đỉnh trên đường đi được gạch dưới (trên cột các đỉnh loại). Cuối cùng theo thứ tự ngược lại ta nhận được đường đi ngắn nhất.

Sau đây là bảng tính toán của ví dụ trên.

	a	b	c	d	e	f	g	z	
1:	<u>0</u>								<u>a</u>
2:		2(a)				<u>1(a)</u>			f
3:		<u>2(a)</u>		4(f)			6(f)		<u>b</u>
4:			<u>4(b)</u>	4(f)	6(b)		6(f)		<u>c</u>
5:				<u>4(f)</u>	6(b)		6(f)	5(c)	d
6:					6(b)		6(f)	<u>5(c)</u>	<u>z</u>

Hình 3.34. Kết quả Dijkstra đối với $G(8, 11)$

Ta suy ra đường đi ngắn nhất từ a đến z là: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow z$ với độ dài là 5.

Hay chương trình minh họa kết quả của thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến z của đồ thị G trên tương ứng lần lượt các đỉnh từ 1 đến đỉnh 8. Ta có kết quả sau,

```

Nhap so node xuất phát:1
Khoảng cách từ 1 đến 2 là: 2
Đường đi là: 2->1
Khoảng cách từ 1 đến 3 là: 4
Đường đi là: 3->2->1
Khoảng cách từ 1 đến 4 là: 4
Đường đi là: 4->6->1
Khoảng cách từ 1 đến 5 là: 6
Đường đi là: 5->2->1
Khoảng cách từ 1 đến 6 là: 1
Đường đi là: 6->1
Khoảng cách từ 1 đến 7 là: 6
Đường đi là: 7->6->1
Khoảng cách từ 1 đến 8 là: 5
Đường đi là: 8->3->2->1
-----
Process exited after 22.42 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

Hình 3.35. Chương trình thuật toán Dijkstra đồ thị $G(8, 11)$

3.3.3.3. Thuật toán Floyd

Thuật giải tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh trong đồ thị có hướng liên thông có trọng số (không bắt buộc ≥ 0).

◇ *Đầu vào.* Đồ thị liên thông $G = (V, E, W)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, có trọng số $w(i, j)$ với mọi cung (i, j) .

◇ *Đầu ra.* Ma trận $D = [d(i, j)]$, trong đó $d(i, j)$ là chiều dài đường đi ngắn nhất từ i đến j với mọi cặp (i, j) .

◇ *Phương pháp.*

(1) Bước khởi tạo. Ký hiệu D_0 là ma trận xuất phát,

$$D_0 = [d_0(i, j)]$$

trong đó $d_0(i, j) = w(i, j)$ nếu tồn tại cung (i, j) và $d_0(i, j) = +\infty$ nếu không tồn tại cung (i, j) (đặc biệt nếu không có khuyên tại i thì $d_0(i, i) = +\infty$).

Gán $k := 0$.

(2) Kiểm tra kết thúc. Nếu $k = n$, kết thúc. $D = D_n$ là ma trận độ dài đường đi ngắn nhất. Ngược lại tăng k lên 1 đơn vị ($k := k+1$) và sang bước (3).

(3) Tính ma trận D_k theo D_{k-1} ,

Với mọi cặp (i, j) , $i, j = \overline{1, n}$ thực hiện,

Nếu $d_{k-1}(i, j) > d_{k-1}(i, k) + d_{k-1}(k, j)$ thì đặt,

$$d_k(i, j) := d_{k-1}(i, k) + d_{k-1}(k, j)$$

ngược lại đặt

$$d_k(i, j) := d_{k-1}(i, j).$$

Quay lại bước (2).

Hay nói cách khác,

Input: n – số đỉnh của đồ thị.

d – ma trận kề của đồ thị.

Output: Chuyển đổi ma trận d thành ma trận độ dài đường đi ngắn nhất.

```
for (k = 0; k = n - 1; k++) {
    for (i = 0; i = n - 1; i++) {
        for (j = 0; j = n - 1; j++) {
             $d[i][j] = \min(d[i][j], a[i][k] + d[k][j]);$ 
        }
    }
}
```

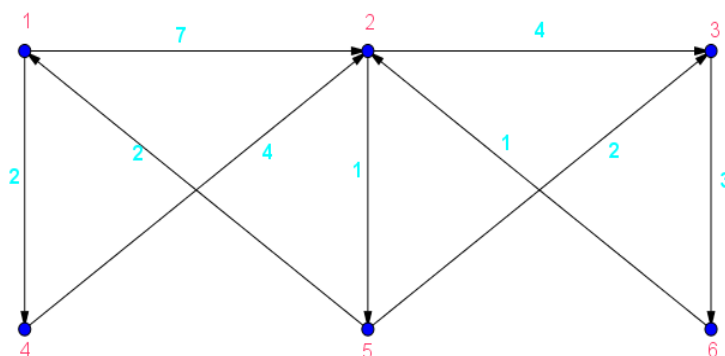
- Định lý 1. Thuật toán Floyd là đúng [5].

- Hệ quả.

(i) Nếu ma trận kết quả của thuật toán Floyd có phần tử hữu hạn trên đường chéo $i = i$ thì đồ thị chứa chu trình.

(ii) Nếu ma trận kết quả chứa phần tử $+\infty$ ngoài đường chéo $i = i$ thì đồ thị không liên thông mạnh.

Ví dụ 3.16. Xét đồ thị sau,



Hình 3.36. Đồ thị có hướng $G(6, 9)$

Áp dụng thuật toán Floyd hãy xác định ma trận khoảng cách giữa mọi cặp đỉnh (i, j) trong đồ thị trên?

Giải: Áp dụng thuật toán Floyd ta có,

Ma trận khoảng cách xuất phát D_0 là (các ô trống là ∞) được thể hiện bên dưới,

$D_0 =$

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
1		7		2		
2			4		1	
3						3
4		4				
5	2		2			
6		1				

Từ ma trận D_0 , theo thuật toán ta xây dựng các ma trận tiếp theo như sau (các ô gạch dưới có giá trị thay đổi)

$D_1 =$

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
1		7		2		
2			4		1	
3						3
4		4				
5	2	<u>9</u>	2	<u>4</u>		
6		1				

 $D_2 =$

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
1		7	<u>11</u>	2	<u>8</u>	
2			4		1	
3						3
4		4	<u>8</u>		<u>5</u>	
5	2	9	2	4	<u>10</u>	
6		1	<u>5</u>		<u>2</u>	

 $D_3 =$

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
1		7	11	2	8	<u>14</u>
2			4		1	<u>7</u>
3						3
4		4	8		5	<u>11</u>
5	2	9	2	4	10	<u>5</u>
6		1	5		2	<u>8</u>

 $D_4 =$

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
1		<u>6</u>	<u>10</u>	2	<u>7</u>	<u>13</u>
2			4		1	7
3						3
4		4	8		5	11
5	2	<u>8</u>	2	4	<u>9</u>	5
6		1	5		2	8

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
1	<u>9</u>	6	<u>9</u>	2	7	<u>12</u>
2	<u>3</u>	<u>9</u>	<u>3</u>	<u>5</u>	1	<u>6</u>

$D_5 =$	Đỉnh	1	2	3	4	5	6
	3						3
	4	<u>7</u>	4	<u>7</u>	<u>9</u>	5	<u>10</u>
	5	2	8	2	4	9	5
	6	<u>4</u>	1	<u>4</u>	<u>6</u>	2	<u>7</u>

$D = D_6 =$	Đỉnh	1	2	3	4	5	6
	1	9	6	9	2	7	12
	2	3	<u>7</u>	3	5	1	6
	3	<u>7</u>	<u>4</u>	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>5</u>	3
	4	7	4	7	9	5	10
	5	2	<u>6</u>	2	4	<u>7</u>	5
	6	4	1	4	6	2	7

Cuối cùng D là ma trận khoảng cách ngắn nhất giữa mọi đỉnh.

Ngoài ra, dựa trên cơ sở của thuật toán Floyd kết quả được minh họa như sau,

Ma tran khoang cach cua thuat toan Floyd la:						
9	6	9	2	7	12	
3	7	3	5	1	6	
7	4	7	9	5	3	
7	4	7	9	5	10	
2	6	2	4	7	5	
4	1	4	6	2	7	

Hình 3.37. Chương trình minh họa thuật toán Floyd đồ thị $G(6, 9)$

Cuối cùng, D là ma trận khoảng cách ngắn nhất giữa các đỉnh. Theo hệ quả chúng ta chứng tỏ rằng đồ thị liên thông và chứa chu trình.

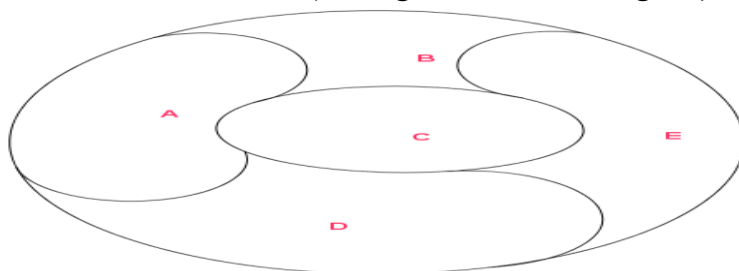
3.4. Bài toán tô màu đồ thị

3.4.1. Tô màu đồ thị

Những bài toán liên quan đến tô màu bản đồ đã dẫn đến rất nhiều kết quả trong lý thuyết đồ thị. Khi một bản đồ được tô màu, *hai miền có chung biên giới phải được tô bằng hai màu khác nhau*.

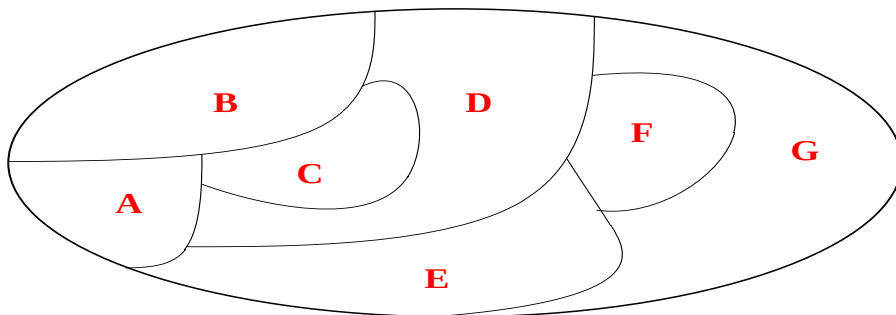
Một bài toán đặt ra là xác định số màu tối thiểu để tô bản đồ sao cho các miền kề nhau không được tô cùng màu.

Ví dụ 3.17. Bản đồ sau cần 3 màu (nhưng 2 màu là không đủ),



Hình 3.38. Bản đồ tô 3 màu

Ví dụ 3.18. Bản đồ sau cần 4 màu (nhưng 3 màu là không đủ),



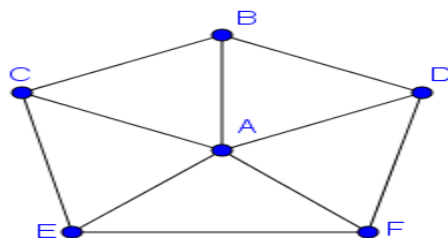
Hình 3.39. Bản đồ tô 4 màu

Định nghĩa 3.12.

Tô màu đỉnh một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của nó sao cho không có hai đỉnh kề được gán cùng một màu.

Sắc số của đồ thị G , ký hiệu là $\chi(G)$, là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu đỉnh đồ thị.

Ví dụ 3.19. Tìm sắc số của đồ thị G sau,



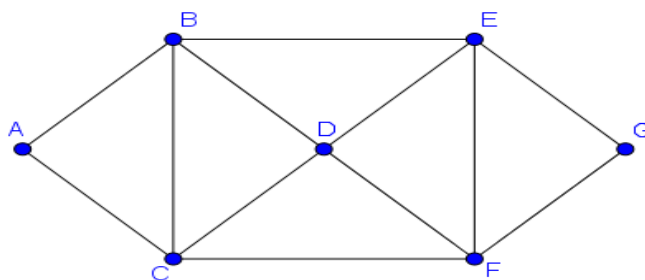
Hình 3.40. Sắc số đồ thị vô hướng $G(6, 10)$

Đồ thị chứa K_3 , vậy sắc số của đồ thị ≥ 3 . Đồ thị chứa chu trình độ dài lẻ

(A, B, C, D, E, A)

nên ta phải dùng ít nhất 3 màu để tô các đỉnh A, B, C, D, E . Đỉnh F kề các đỉnh đó nên ta cần thêm một màu nữa để tô F . Suy ra $\chi(G) = 4$.

Ví dụ 3.20. Tìm sắc số của đồ thị G sau,



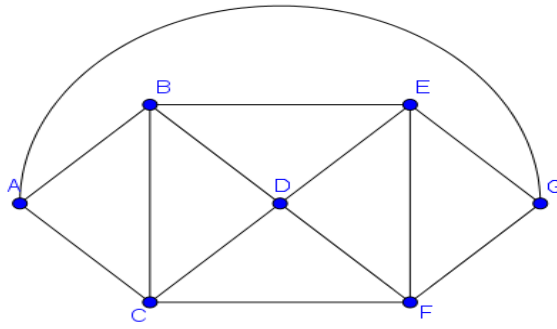
Hình 3.41. Sắc số đồ thị vô hướng $G(7, 12)$

Đồ thị chứa K_3 , vậy sắc số của đồ thị ≥ 3 . Đồ thị chứa chu trình độ dài lẻ

(A, B, C, A)

nên ta dùng ít nhất 3 màu 1, 2, 3 để tô như sau, tô các đỉnh A, D, G màu 1; các đỉnh B, F màu 2 và các đỉnh E, C màu 3. Như vậy $\chi(G) = 3$.

Ví dụ 3.21. Tìm sắc số của đồ thị G sau,



Hình 3.42. Sắc số đồ thị vô hướng $G(7, 13)$

Đồ thị con H với các đỉnh B, C, D, E, F có chu trình lẻ nên $\chi(H) \geq 3$. Không mất tính tổng quát, ta dùng 3 màu 1, 2, 3 để tô các đỉnh như sau, tô B, F màu 1; E, C màu 2 và D màu 3. Để tô được hai đỉnh A và G , ta bắt buộc phải dùng thêm ít nhất 1 màu nữa. Như vậy $\chi(G) = 4$.

Định lý 1. Nếu đồ thị G chứa đồ thị con đẳng cấu với K_n , thì $\chi(G) \geq n$.

Định lý 2. Một đơn đồ thị có thể tô bằng 2 màu khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.

Định lý 3. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ với mọi đồ thị G , trong đó $\Delta(G)$ là bậc đỉnh lớn nhất của G (đẳng thức xảy ra khi $G = K_n$ hoặc G là chu trình độ dài lẻ).

3.4.2. Thuật toán tuần tự ưu tiên đỉnh bậc lớn nhất

Cho đồ thị $G = (V, E)$. Thuật toán sau sẽ tô màu các đỉnh đồ thị với số màu k gần với sắc số $\chi(G)$.

(i) Lập danh sách các đỉnh của đồ thị

$$E' = v_1, v_2, \dots, v_n$$

theo thứ tự bậc giảm dần

$$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \dots \geq \deg v_n$$

Đặt $i := 1$.

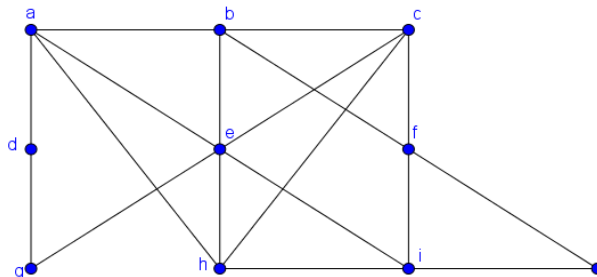
(ii) Tô màu i cho đỉnh đầu tiên trong danh sách. Duyệt lần lượt các đỉnh tiếp theo và tô màu i cho đỉnh không kề đỉnh đã được tô màu i .

(iii) Nếu tất cả các đỉnh đã được tô màu thì kết thúc, đồ thị đã được tô màu bằng i màu.

Ngược lại sang bước (iv).

(iv) Loại khỏi E' các đỉnh đã tô màu, đặt $i := i+1$, và quay lại bước (ii).

Ví dụ 3.22. Tô màu đồ thị sau,



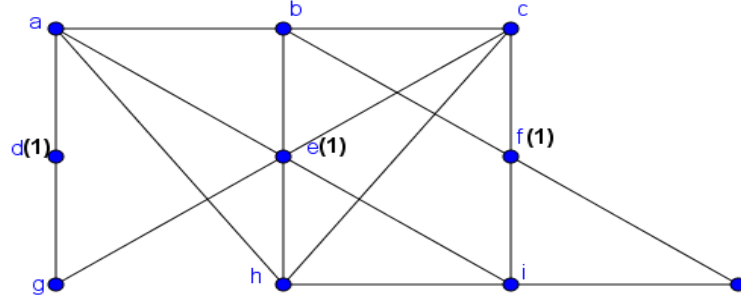
Hình 3.43. Sắc số đồ thị vô hướng $G(10, 18)$

Ta có: $\deg(a) = 4, \deg(b) = 4, \deg(c) = 4, \deg(d) = 2, \deg(e) = 6$
 $\deg(f) = 4, \deg(g) = 2, \deg(h) = 4, \deg(i) = 4, \deg(j) = 2.$

Ta xếp các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần,

$$E' = e, a, b, c, f, h, i, d, g, j$$

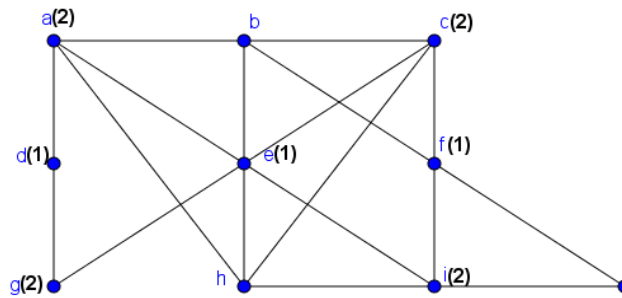
Tô màu đỉnh 1 cho các đỉnh e, f, d và được kết quả như sau,



Hình 3.44. Sắc số màu 1 đồ thị vô hướng $G(10, 18)$

Các đỉnh còn lại là $E' = a, b, c, h, i, g, j$

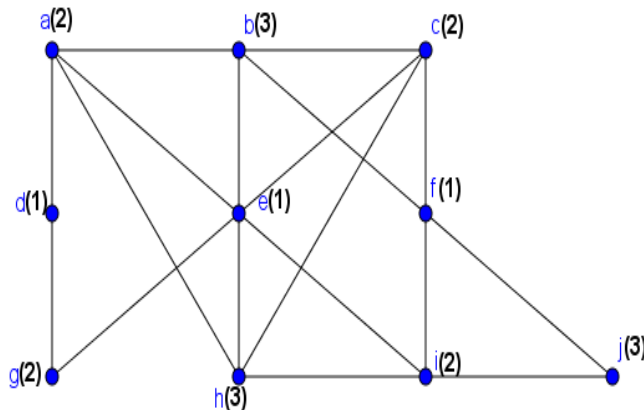
Tô màu 2 cho các đỉnh a, c, i, g và được kết quả hình ảnh đồ thị minh họa sau,



Hình 3.45. Sắc số màu 2 đồ thị vô hướng $G(10, 18)$

Các đỉnh còn lại là $E' = b, h, j$

Tô màu 3 cho các đỉnh b, h, j ta nhận được đồ thị tô màu như sau,



Hình 3.46. Sắc số màu 3 đồ thị vô hướng $G(10, 18)$

3.4.3. Một số bài toán ứng dụng

3.4.3.1. Bài toán điều khiển đèn hiệu nút giao thông

Giả sử ta cần thiết lập một quy trình điều khiển đèn hiệu ở nút giao thông phức tạp, nhiều giao lộ, sao cho trong một khoảng thời gian ấn định, một số tuyến được thông qua, trong khi một số tuyến khác bị cấm để tránh xảy ra ùn tắc.

Vấn đề đặt ra là phân hoạch các tuyến đường thành một số ít nhất các nhóm, sao cho các tuyến trong một nhóm không ùn tắc. Khi đó thời gian chờ đợi tối đa để được thông đường là ít nhất.

Giả sử nút giao thông có n tuyến $T_1, T_2, \dots, T_n$. Những tuyến giao nhau có thể dẫn đến ùn tắc gọi là *tuyến xung khắc*.

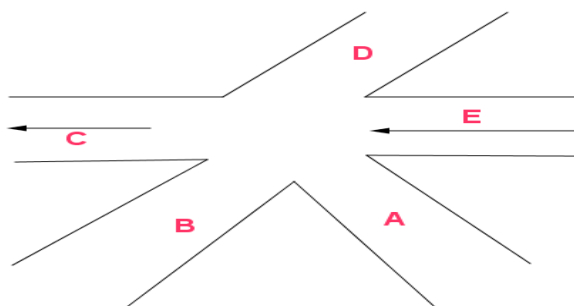
Như vậy đèn hiệu phải báo sao cho những tuyến xung khắc không đồng thời lưu thông, và cho phép cùng lưu thông những tuyến không xung khắc.

Ta mô hình hóa bài toán bằng đồ thị và đưa về bài toán tô màu đồ thị như sau.

Các đỉnh của đồ thị là các tuyến đường, và hai tuyến kề nhau khi và chỉ khi chúng xung khắc.

Ta tô màu các đỉnh của đồ thị sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu. Ta coi mỗi màu đại diện cho một pha điều khiển đèn báo, các tuyến cùng màu đó lưu thông. Như vậy bài toán ban đầu đưa về bài toán tô màu đồ thị với số màu ít nhất.

Ví dụ 3.23. Xét nút giao thông sau,



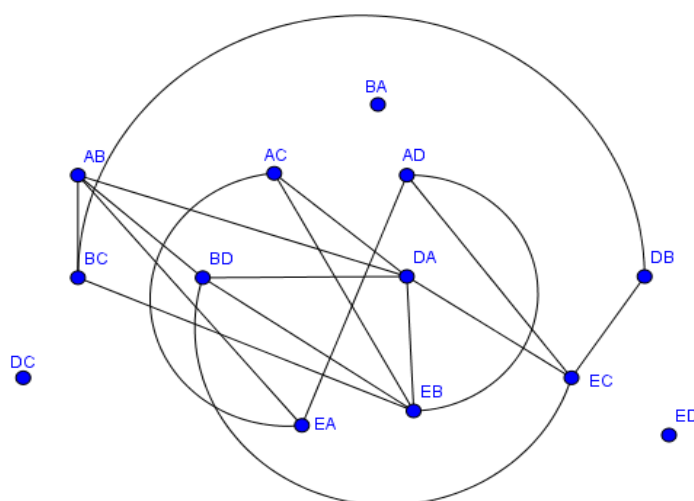
Hình 3.47. Minh họa hệ thống giao thông

Ở đây C và E là đường một chiều, còn các đường khác là đường hai chiều. Như vậy sẽ có 13 tuyến có thể thực hiện qua nút giao thông này là,

AB, AC, AD, BA, BC, BD, DA, DB, DC, EA, EB, EC, ED.

Những tuyến như AB (từ A tới B) và EC có thể lưu thông đồng thời. Nhưng những tuyến như AD và EB thì không thể lưu thông đồng thời được, vì chúng giao nhau dẫn đến ùn tắc, đó là các *tuyến xung khắc*.

Mô hình đồ thị có dạng sau:



Hình 3.48. Đồ thị minh họa hệ thống giao thông tuyến xung khắc
 Áp dụng thuật toán tô màu của các đỉnh đồ thị và nhận được kết quả như sau,

Bảng 3.5. Kết quả tô màu hệ thống giao thông

Đỉnh	DA	EB	AB	BD	EC	AC	AD	BC	EA	DB	BA	DC	ED
Bậc	5	5	4	4	4	3	3	3	3	2	0	0	0
Màu	1	2	2	3	1	3	3	1	1	2	1	1	1

Như vậy ta chỉ cần 3 pha điều khiển,

Pha 1: Lưu thông các tuyến DA, EC, BC, EA.

Pha 2: Lưu thông các tuyến EB, AB, DB.

Pha 3: Lưu thông các tuyến BD, AC, AD.

Các tuyến BA, DC, ED lúc nào cũng lưu thông.

3.4.3.2. Bài toán lập lịch thi

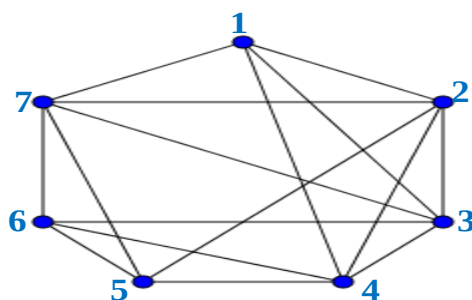
Giả sử mỗi sinh viên phải thi một số môn trong n môn thi. Hãy lập lịch thi sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một thời gian và số đợt thi là ít nhất.

Để giải bài toán này ta lập đồ thị có các đỉnh là các môn thi và hai môn thi kề nhau nếu có một sinh viên thi cả hai môn này. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy bài toán lập lịch thi được đưa về bài toán tô màu đồ thị.

Ví dụ 3.24. Có 7 môn thi cần xếp lịch. Các môn học được đánh số từ 1 đến 7. Các cặp môn thi sau có chung sinh viên,

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 6), \\ (3, 7), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7), (6, 7).$$

Đồ thị tương ứng như sau,



Hình 3.49. Đồ thị $G(7, 16)$ minh họa lập lịch

Áp dụng thuật toán tô màu các đỉnh đồ thị và nhận được kết quả sau,

Bảng 3.6. Kết quả tô màu đồ thị $G(7, 16)$

Đỉnh	2	3	4	7	1	5	6
Bậc	5	5	5	5	4	4	4
Màu	1	2	3	3	4	2	1

Như vậy ta có lịch thi gồm 4 đợt như sau,

Đợt 1: Thi các môn 2, 6.

Đợt 2: Thi các môn 3, 5.

Đợt 3: Thi các môn 4, 7.

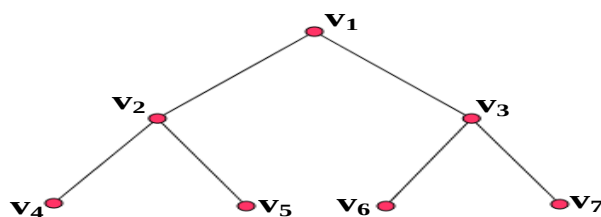
Đợt 4: Thi môn 1.

3.5. Cây khung và các thuật toán liên quan

3.5.1. Khái niệm cơ bản

Định nghĩa 3.13. Cây là đồ thị liên thông không chứa chu trình.

Ví dụ 3.25. Đồ thị sau là cây.



Hình 3.50. Biểu diễn cây

Gốc của cây là một đỉnh đặc biệt, thông thường là đỉnh trên cùng.

Mức của đỉnh là độ dài đường đi từ gốc đến đỉnh đó, mức gốc bằng 0.

Độ cao của cây là mức lớn nhất của cây (tức là mức của đỉnh cách xa cây nhất).

Trong ví dụ trên nếu ta chọn v_1 là gốc thì v_2, v_3 là những đỉnh mức 1, các đỉnh v_4, v_5, v_6, v_7 có mức 2, và độ cao của cây là 2.

Định nghĩa 3.14.

Cho T là cây có gốc v_0 . Giả sử x, y, z là các đỉnh của T và $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ là đường đi trong T . Khi đó ta gọi,

v_{n-1} là *cha* của v_n ;

$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ là *tiền bối* của v_n ;

v_n là *con* của v_{n-1} ;

v_n là *hậu thế* của v_{n-1} nếu v_{n-1} là tiền bối của v_n ;

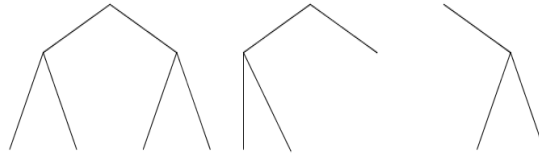
y và z là *anh em* nếu chúng đều là con của đỉnh x .

x là *đỉnh lá* của cây nếu nó không có con.

x là *đỉnh trong* của cây nếu nó có con.

Định nghĩa 3.15. *Rừng* là đồ thị mà mỗi thành phần liên thông là cây.

Ví dụ 3.26. Đồ thị sau là rừng của 3 cây.



Hình 3.51. Biểu diễn rừng - 3 cây

Định nghĩa 3.16. Cây có gốc được gọi là cây m -phân nếu tất cả các đỉnh trong của nó không có hơn m con. Cây được gọi là m -phân đầy đủ nếu mọi đỉnh trong có đúng m con. Cây m -phân với $m = 2$, được gọi là cây nhị phân.

3.5.2. Tính chất

Định lý 1.

Cho $G = (V, E)$ là một cây. Các mệnh đề sau tương đương,

- (i) $G = (V, E)$ là đồ thị liên thông và không có chu trình.
- (ii) $G = (V, E)$ không chứa chu trình và có $n - 1$ cạnh.
- (iii) $G = (V, E)$ liên thông và có $n - 1$ cạnh.
- (iv) Hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bởi một đường đi duy nhất.
- (v) $G = (V, E)$ không chứa chu trình và nếu thêm một cạnh nối hai đỉnh thì ta thu được đúng một chu trình.
- (vi) $G = (V, E)$ liên thông và nếu thêm một cạnh nối hai đỉnh thì ta thu được đúng 1 chu trình.

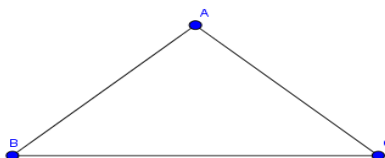
Định lý 2. Một cây có ít nhất 2 đỉnh treo.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong cây G số đỉnh treo nhỏ hơn 2. Có hai trường hợp xảy ra,

- a. Số đỉnh treo = 0.
- b. Số đỉnh treo = 1.

Ta chứng minh cả hai trường hợp đều không xảy ra.

Trường hợp a. Nếu số đỉnh treo = 0, tức là không có đỉnh treo, hay mỗi đỉnh trong G đều ít nhất 2 cạnh liên quan đến nó, tức là bậc của nó ≥ 2 . Xuất phát từ mỗi đỉnh vào 1 cạnh và đi ra 1 cạnh khác (không lặp lại), quá trình này là vô hạn, vì nếu hữu hạn thì xuất hiện đỉnh treo. Tính vô hạn này mâu thuẫn với tính hữu hạn của các cạnh trong đồ thị. Cụ thể được thể hiện như hình bên dưới,



Hình 3.52. Cây có số đỉnh treo bằng 0

Trường hợp b. Giả sử có 1 đỉnh treo. Ta xuất phát từ đỉnh này đi ngược lại quá trình trên thì cũng dẫn đến sự mâu thuẫn với tính hữu hạn của đồ thị.

Như vậy định lý được chứng minh.

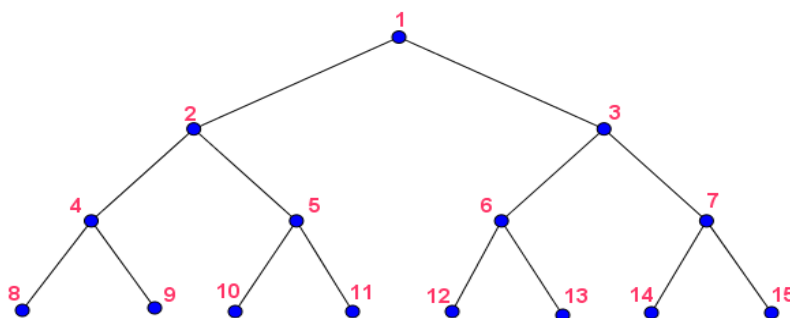
Định lý 3. Cho G là cây m - phân đầy đủ. Khi đó,

1. i đỉnh trong sẽ có tất cả $n = m \cdot i + 1$ đỉnh và $l = m - 1 \cdot i + 1$ đỉnh ngoài.

2. n đỉnh sẽ có $i = \frac{n-1}{m}$ đỉnh trong và $l = \frac{m-1}{m} \cdot n + 1$ đỉnh ngoài (đỉnh lá).

3. l đỉnh ngoài có $n = \frac{ml-1}{m-1}$ đỉnh và $i = \frac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong.

Ví dụ 3.27. Cho cây nhị phân đầy đủ có 7 đỉnh trong, 8 đỉnh lá và 15 đỉnh như hình bên dưới. Hãy chứng minh định lý 3 trên?



Hình 3.53. Cây nhị phân đầy đủ chiều cao 3

Giải:

Theo định lý 3, ta có,

1. Cây 2 - phân đầy đủ với 7 đỉnh trong sẽ có tất cả $n = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ đỉnh.

2. Cây 2 - phân đầy đủ với 15 đỉnh sẽ có $i = \frac{15-1}{2} = 7$ đỉnh trong và $l = \frac{2-1}{2} \cdot 15 + 1 = 8$ đỉnh lá.

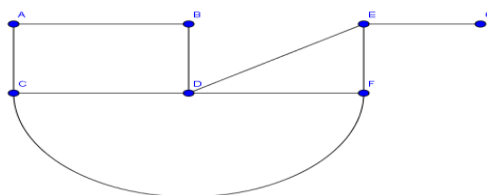
3. Cây 2 - phân đầy đủ với 7 đỉnh trong sẽ có $n = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ đỉnh và $l = 2 - 1 \cdot 7 + 1 = 8$ đỉnh lá.

4. Cây 2 - phân đầy đủ có $n = \frac{2 \cdot 8 - 1}{2 - 1} = 15$ đỉnh và $i = \frac{8 - 1}{2 - 1} = 7$ đỉnh trong.

3.5.2. Thuật toán tìm cây khung nhỏ nhất

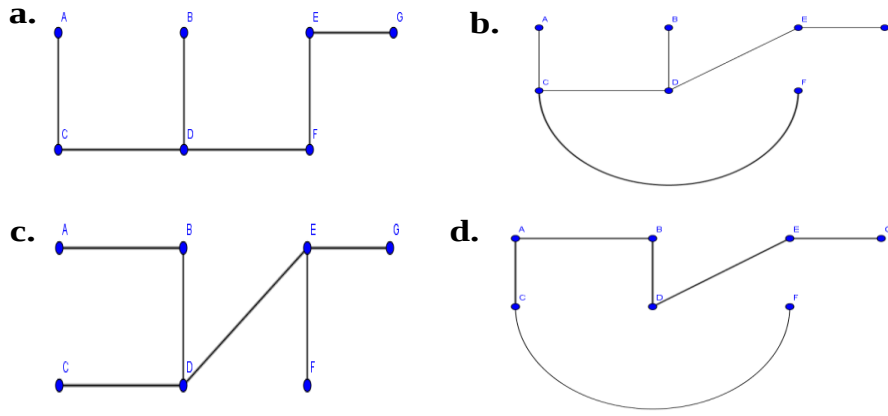
Định nghĩa 3.17. Cho G là một đơn đồ thị. Một cây được gọi là *cây khung* của G nếu nó là một đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh của G .

Ví dụ 3.28. Tìm cây khung của đồ thị G hình bên dưới sau,



Hình 3.54. Đơn đồ thị liên thông $G(7, 9)$.

Giải: Đồ thị G liên thông nhưng không phải là một cây vì nó chứa chu trình đơn. Vì vậy chúng ta phải loại chu trình trong G bằng cách loại bỏ một số cạnh nhưng đồ thị con nhận được vẫn liên thông và chứa tất cả các đỉnh của G . Dãy các cạnh bị xóa đi tạo ra cây khung được minh họa như hình bên dưới sau,



Hình 3.55. Các cây khung của G.

Định nghĩa 3.18. Cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông có trọng số là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.

Chúng ta sẽ tìm hiểu hai thuật toán xây dựng cây khung nhỏ nhất. Cả hai đều được tiến hành bằng cách ghép các cạnh có trọng số nhỏ nhất trong số các cạnh có một tính chất nào đó mà chưa được dùng.

Thuật toán đầu tiên do Robert Prim công bố vào năm 1957, mặc dù ý tưởng cơ bản của nó đã có từ sớm hơn rất nhiều. Để thực hiện **thuật toán Prim**, ta bắt đầu bằng việc chọn đúng một đỉnh bất kỳ của cây và mở rộng từng bước một, mỗi bước thêm một cạnh mới vào cây cho đến khi được cây khung bao trùm tất cả các đỉnh của đồ thị. Hay chúng ta sẽ thực hiện lần lượt ghép vào cây các cạnh có trọng số tối thiểu các cạnh liên thuộc với một đỉnh của cây và không tạo ra chu trình trong cây. Thuật toán sẽ dừng khi $(n - 1)$ cạnh đã được ghép vào cây.

3.5.2.1. Thuật toán Prim

◇ **Đầu vào.** $G = (V, E)$ có trọng số và liên thông với $|V| = n$ đỉnh.

Các đỉnh ký hiệu là

$$1, 2, \dots, n$$

Trọng số cạnh $(i, j), (i, j) \in E$, ký hiệu là w_{ij} .

◇ **Đầu ra.** Cây khung G_0 có trọng số bé nhất hoặc kết luận đồ thị không liên thông.

Thuật toán.

(1) Khởi tạo.

G_0 là đồ thị gồm 1 đỉnh (bất kỳ) và không có cạnh.

(2) Kiểm tra điều kiện kết thúc.

Nếu G_0 có $n - 1$ cạnh, kết thúc. Kết luận G_0 là cây khung nhỏ nhất. Ngược lại sang bước (3).

(3) Thêm cạnh.

Ký hiệu M là tập,

$$M = \{(i, j) \in E \mid i \in G_0 \text{ \& } j \notin G_0\}$$

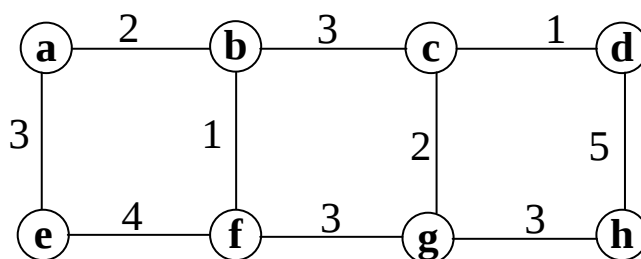
Tìm cạnh $(k, h) \in M$ sao cho,

$$w_{kh} = \min\{w_{ij} \mid (i, j) \in M\}$$

Nếu $w_{kh} < \infty$, thêm cạnh (k, h) và đỉnh h vào G_0 , sang bước (2).

Ngược lại, tức $M = \emptyset$, kết thúc. Kết luận đồ thị không liên thông.

Ví dụ 3.29. Cho đồ thị $G = (V, E)$ dưới dạng



Hình 3.56. Đồ thị G

Tìm cây khung bé nhất theo thuật toán Prim?

Giải:

(1) Khởi tạo. G_0 chỉ có đỉnh a , không có cạnh, hay,

$$G_0 := a, \emptyset, d(G_0) := 0$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của G_0 là 0, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là,

$$M = \{(a, b), (a, e)\}$$

Ta có, $w_{ab} = 2 = \min_{i,j \in M} w_{ij} = \min\{2, 3\}$

Thêm đỉnh b và cạnh (a, b) vào G_0 ,

$$G_0 := a, b, \{(a, b)\}, d(G_0) := d(G_0) + w_{ab} = 2$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của G_0 là 1, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là,

$$M = \{(a, e), (b, c), (b, f)\}$$

Ta có, $w_{bf} = 1 = \min\{w_{ij} | (i, j) \in M\}$

Thêm đỉnh f và cạnh (b, f) vào G_0 ,

$$G_0 := a, b, f, \{(a, b), (b, f)\}, d(G_0) := d(G_0) + w_{bf} = 3.$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của T là 2, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là, $M = \{(a, e), (b, c), (f, e), (f, g)\}$

Ta có, $w_{ae} = 3 = \min\{w_{ij} | (i, j) \in M\}$

Thêm đỉnh e và cạnh (a, e) vào G_0 ,

$$G_0 := (a, b, f, e, \{(a, b), (b, f), (a, e)\}),$$

$$d(G_0) := d(G_0) + w_{ae} = 6$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của G_0 là 3, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là, $M = \{(b, c), (f, e), (f, g)\}$

Ta có, $w_{bc} = 3 = \min\{w_{ij} | (i, j) \in M\}$

Thêm đỉnh c và cạnh (b, c) vào G_0 , ta có,

$$G_0 := (a, b, f, e, c, \{(a, b), (b, f), (a, e), (b, c)\}),$$

$$d(G_0) := d(G_0) + w_{bc} = 9$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của G_0 là 4, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là,

$$M = \{(c, d), (c, g), (f, g), (f, e)\}$$

Ta có, $w_{cd} = 1 = \min\{w_{ij} | (i, j) \in M\}$

Thêm đỉnh d và cạnh (c, d) vào G_0 , ta có,

$$G_0 := (a, b, f, e, c, d, \{(a, b), (b, f), (a, e), (b, c), (c, d)\})$$

$$d G_0 := d G_0 + w_{cd} = 10$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của G_0 là 5, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là,

$$M = \{(f, e), (f, g), (c, g), (d, h)\}$$

Ta có, $w_{cg} = 2 = \min\{w_{ij} | (i, j) \in M\}$

Thêm đỉnh g và cạnh (c, g) vào G_0 , ta có,

$$G_0 := (a, b, f, e, c, d, g, \{a, b, b, f, a, e, b, c, c, d, (c, g)\})$$

$$d G_0 := d G_0 + w_{cg} = 12$$

(2) Kiểm tra. Số cạnh của G_0 là 6, sang bước (3).

(3) Thêm cạnh. Tập M là, $M = \{(e, f), (f, g), (g, h), (d, h)\}$

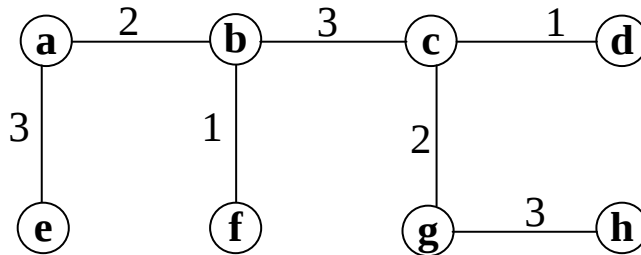
Ta có, $w_{gh} = 3 = \min\{w_{ij} | (i, j) \in M\}$

Thêm đỉnh h và cạnh (g, h) vào G_0 , ta có,

$$G_0 := (a, b, f, e, c, d, g, h, \{a, b, b, f, a, e, b, c, c, d, c, g, (g, h)\})$$

$$d G_0 := d G_0 + w_{gh} = 15$$

Vậy độ dài cây khung nhỏ nhất G_0 có độ dài là 15 và cây khung nhỏ nhất được biểu diễn minh họa bên dưới sau,



Hình 3.57. Đồ thị G_0

Thuật toán thứ hai do Joseph Kruskal phát minh vào năm 1956, để thực hiện **thuật toán Kruskal**, và thuật toán như sau,

3.5.2.2. Thuật toán Kruskal

◊ *Đầu vào.* $G = (V, E)$ liên thông có trọng số với $|V| = n$ đỉnh.

◊ *Đầu ra.* $G_0 = (V, E')$ cây khung có trọng số bé nhất.

Thuật toán.

- Chọn cạnh có cùng trọng số bé nhất của đồ thị $G = (V, E)$ làm cạnh của cây khung, miễn là cạnh đó không tạo ra chu trình.
- Ghép thêm các cạnh có cùng trọng số bé nhất trong số các cạnh còn lại vào cây khung, miễn là chúng không tạo ra chu trình với các cạnh đã cho.
- Thủ tục ghép như vậy sẽ dừng lại nếu $n - 1$ cạnh đã được chọn.

Thuật toán Kruskal dưới dạng giả mã sau,

Kruskal (G, w)

{ $T := (V, \emptyset)$; // T là cây khung có trọng số bé nhất;

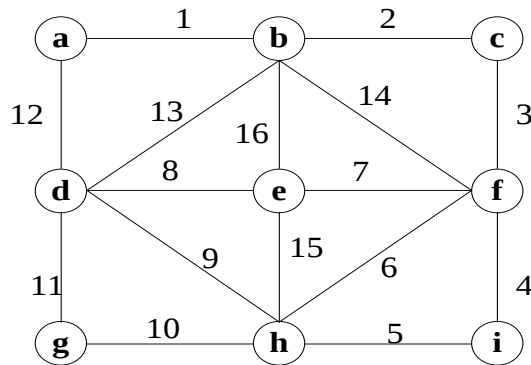
for ($i := 1$; $i \leq n - 1$; $i++$) {

$u :=$ một cạnh bất kỳ có trọng số bé nhất và không tạo ra chu trình khi ghép nó vào T ;

$T := T \cup \{u\}$;

}}

Ví dụ 3.30. Dùng thuật toán Kruskal hãy tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G sau:

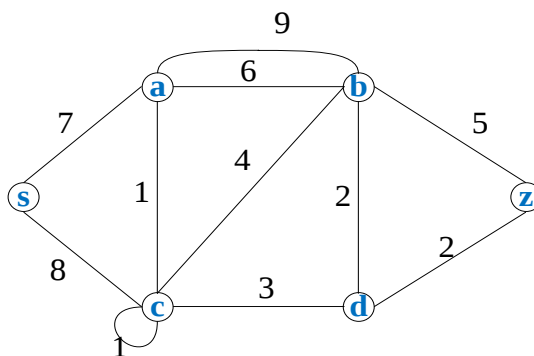


Hình 3.58. Kruskal đồ thị G(9, 16)

Kết quả áp dụng thuật toán Kruskal đối với G để xác định cây khung bé nhất cho ở bảng dưới đây,

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất của G
1	(a, b)	1	Cây khung bé nhất là: $I(G_0) = 40.$
2	(b, c)	2	
3	(c, f)	3	
4	(f, i)	4	
5	(i, h)	5	
6	(f, e)	7	
7	(e, d)	8	
8	(h, d)	10	

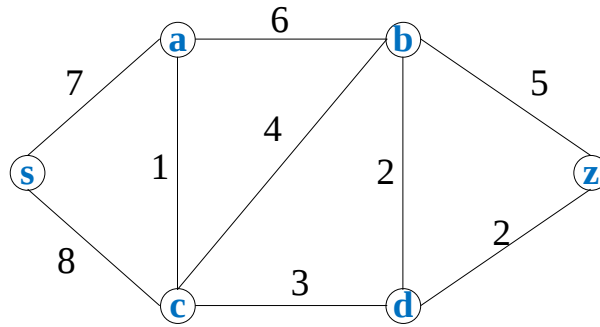
Ví dụ 3.31. Dùng thuật toán Kruskal hãy tìm cây khung bé nhất của đồ thị G bên dưới sau,



Hình 3.50. Kruskal đồ thị G(6, 11)

Đây không phải là đơn đồ thị, vì vậy chúng ta sẽ loại bỏ những cạnh song song và các cạnh khuyên. Hay chúng ta sẽ loại bỏ các cạnh (a, b) với trọng số bằng 9, và

khuyên tại đỉnh c với giá trị trọng số là 1. Khi đó, đồ thị G lúc này được minh họa như hình bên dưới sau,



Hình 3.59. Kruskal đơn đồ thị $G_1(6, 9)$

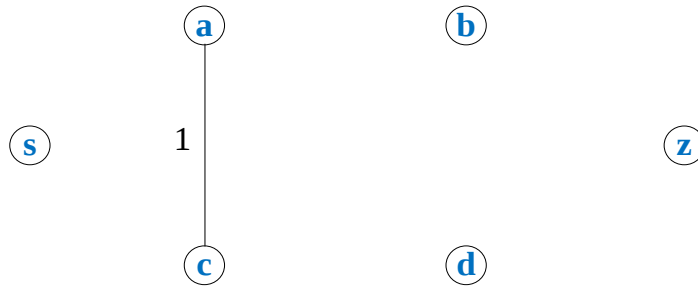
Bây giờ chúng ta sẽ sắp xếp các cạnh của đơn đồ thị G với trọng số cạnh tăng dần.

(a, c)	(b, d)	(d, z)	(c, d)	(b, c)	(b, z)	(a, b)	(s, a)	(s, c)
1	2	2	3	4	5	6	7	8

Bảng 3.7. Sắp xếp cạnh theo trọng số tăng dần $G_1(6, 9)$

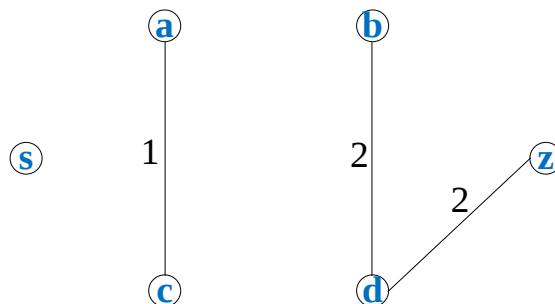
Theo thuật toán Kruskal chúng ta thấy rằng đồ thị G_1 có 6 đỉnh tương ứng từ $\{s, a, b, c, d, z\}$. Vậy cây khung cần tìm là một đồ thị $T(6, 5)$.

Bây giờ chúng ta sẽ thêm các cạnh của G_1 để tạo ra cây khung T bắt đầu với cạnh có trọng số nhỏ nhất. Cạnh đầu tiên được thêm vào cây khung đó chính là cạnh (a, c) với trọng số bằng 1. Lúc này cây khung sẽ được minh họa như sau,



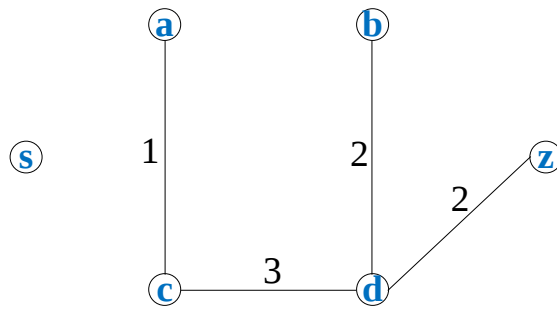
Hình 3.60. Cây khung T_1

Tiếp tục, chúng ta sẽ thêm các cạnh có trọng số nhỏ nhất của các cạnh còn lại trong G_1 vào T_1 sao cho chúng không tạo ra chu trình. Như vậy, chúng ta sẽ thêm được hai cạnh (b, d) và (d, z) vào T_1 .



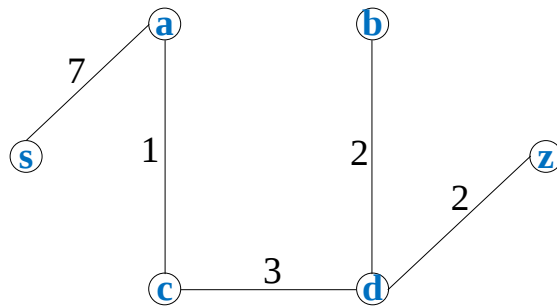
Hình 3.61. Cây khung T_2

Tiếp tục, chúng ta sẽ thêm cạnh (c, d) với trọng số bằng 3 vào T_2 . Chúng ta được cây khung T_3 như sau,

Hình 3.62. Cây khung T_3

Tiếp tục chúng ta sẽ thêm cạnh (b, c) có trọng số nhỏ nhất của G_1 còn lại, nhưng khi thêm cạnh này vào T_3 thì nó tạo ra chu trình. Vì vậy, (b, c) loại bỏ và tương tự đối với các cạnh (b, z) , (a, b) .

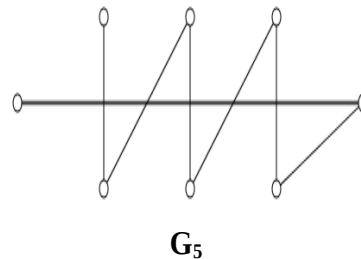
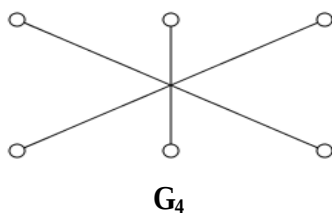
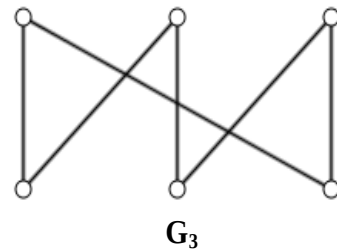
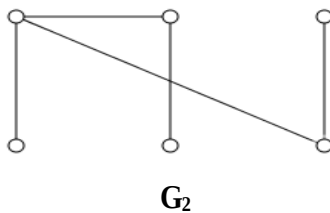
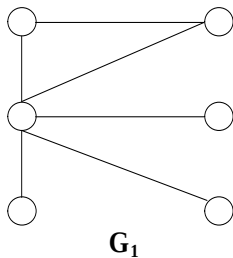
Tiếp tục chúng ta thêm cạnh (s, a) có trọng số nhỏ nhất còn lại của G_1 vào T_3 và không tạo chu trình. Lúc này, cây khung được minh họa như hình vẽ sau,

Hình 3.63. Cây khung T_4

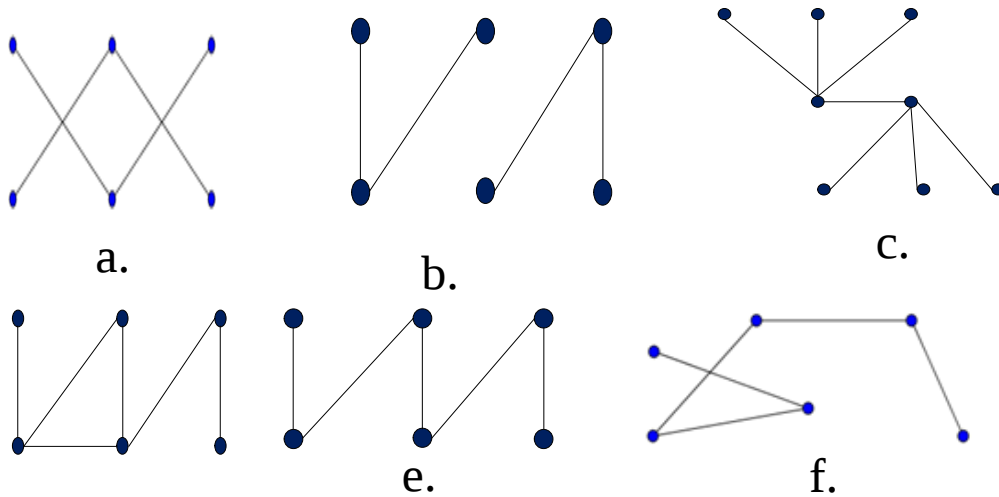
Như vậy cây khung cần tìm chính là cây T_4 .

3.6. Bài tập

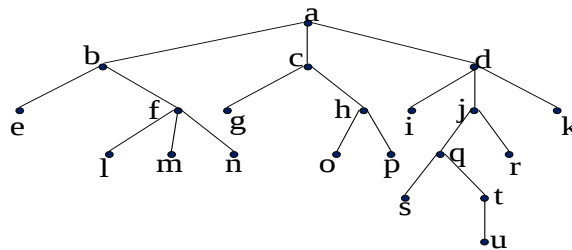
1. Đồ thị nào trong các đồ thị dưới đây là cây?



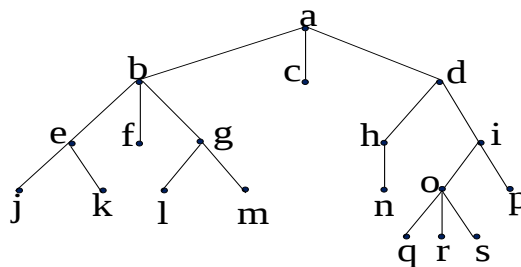
2. Trong các đồ thị sau đồ thị nào là cây?



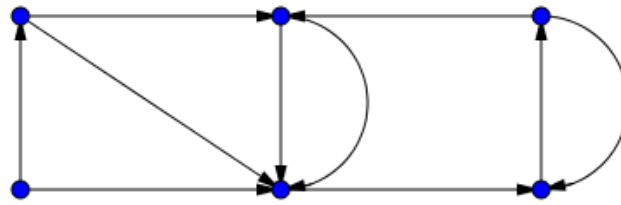
3. Hãy trả lời câu hỏi sau về cây có gốc cho ở hình sau,



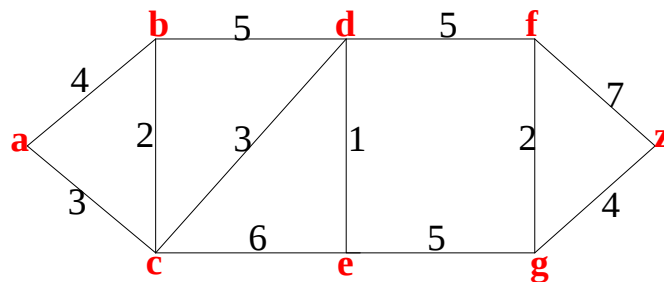
- a. Đỉnh nào là gốc?
 - b. Đỉnh nào là con của i?
 - c. Đỉnh nào là đỉnh trong?
 - d. Đỉnh nào là cha của h?
 - e. Đỉnh nào là đỉnh lá?
 - f. Đỉnh nào là anh em của o?
 - g. Đỉnh nào là tổ tiên của m?
 - h. Đỉnh nào là con cháu của b?
4. Hãy trả lời các câu hỏi như trong bài tập 3 cho cây có gốc sau,



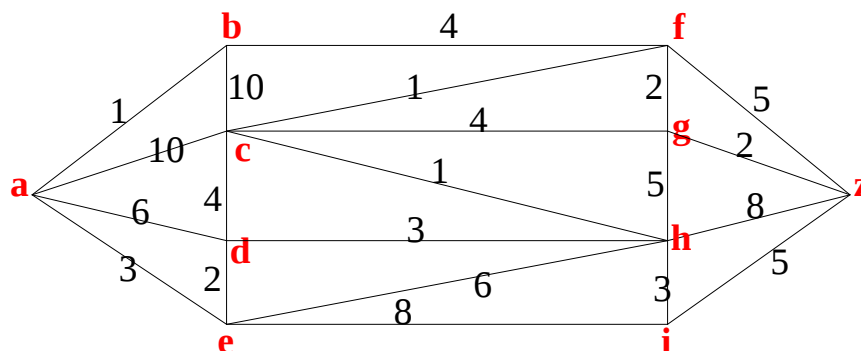
5. Cây có gốc trong bài tập 3 có là cây m - phân đầy đủ với một số nguyên dương m nào đó không?
6. Cây có gốc trong bài tập 4 có là cây m - phân đầy đủ với một số nguyên dương m nào đó không?
7. Xác định ma trận kề của đồ thị bên dưới sau,



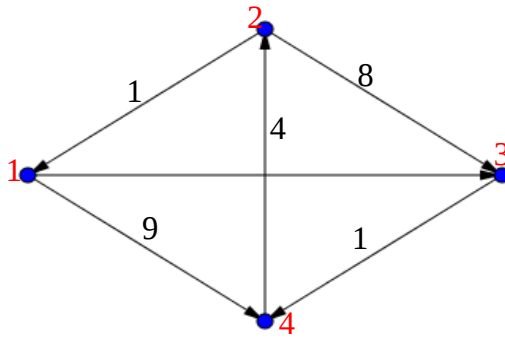
8. Hãy xác định ma trận liên thuộc đồ thị trong câu 7?
9. Tìm mức của mỗi đỉnh trong cây ở bài tập 3?
10. Tìm mức của mỗi đỉnh trong cây ở bài tập 4?
11. Vẽ các cây con của bài cây trong bài tập 3 có gốc tại các đỉnh sau,
 - a. a? b. c? c. e?
12. Vẽ các cây con của cây trong bài tập 4 có gốc tại các đỉnh sau,
 - a. a? b. c? c. e?
13. Cây với 10.000 đỉnh có bao nhiêu cạnh?
14. Cây ngũ phân đầy đủ với 100 đỉnh trong có bao nhiêu cạnh?
15. Cây ngũ phân đầy đủ với 100 đỉnh trong sẽ có bao nhiêu đỉnh lá?
16. Cây nhị phân đầy đủ với 1000 đỉnh trong có bao nhiêu cạnh?
17. Cây tam phân đầy đủ với 100 đỉnh trong có bao nhiêu lá?
18. Cho đồ thị có trọng số sau,



- a. Dùng giải thuật Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z?
 - b. Viết chương trình minh họa kết quả câu a?
19. Cho đồ thị có trọng số sau,

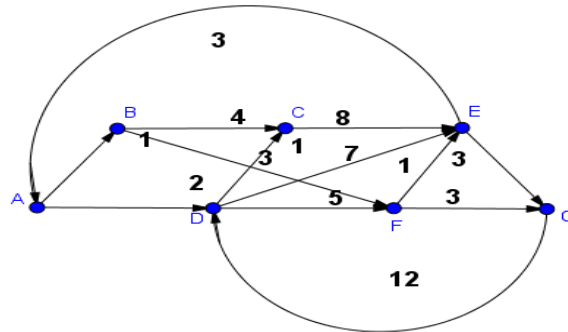


- a. Dùng giải thuật Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z?
 - b. Viết chương trình minh họa kết quả ở câu a?
20. Cho đồ thị sau,



- Dùng giải thuật Floyd tìm đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh trong G ?
- Viết chương trình minh họa câu a?

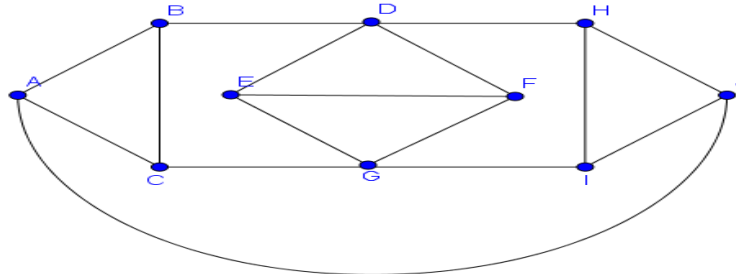
24. Cho đồ thị $G = (V, E, w)$,



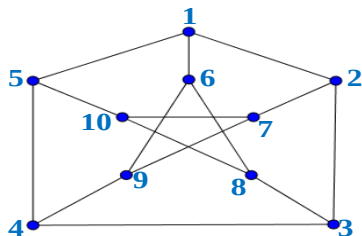
- Dùng giải thuật Floyd tìm đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh trong G ?
- Viết chương trình minh họa thuật toán Floyd ở câu a?

25. Tìm sắc số của đồ thị sau,

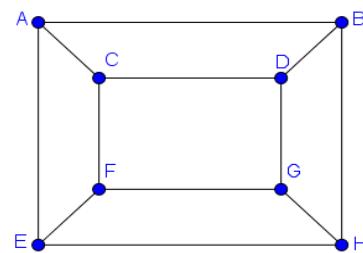
a.



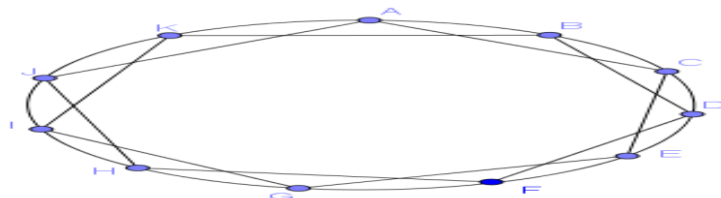
b.



c.



d.



CHƯƠNG 4. ĐẠI SỐ BOOLE

4.1. Đại số Boole

Định nghĩa 4.1. Đại số Boole là một tập B có hai phần tử 0 và 1 với ba phép toán mà chúng ta sử dụng nhiều nhất đó là phép lấy phần bù, phép lấy tổng Boole và tích Boole. Phần bù của một phần tử được kí hiệu bằng một gạch ngang trên đầu và định nghĩa bởi $\overline{0} = 1$ và $\overline{1} = 0$. Tổng Boole được kí hiệu là $+$ hoặc OR có giá trị như sau,

$$1 + 1 = 1; \quad 1 + 0 = 1; \quad 0 + 1 = 1; \quad 0 + 0 = 0.$$

Tích Boole được kí hiệu là $.$ hoặc AND có giá trị như sau,

$$1 . 1 = 1; \quad 1 . 0 = 0; \quad 0 . 1 = 0; \quad 0 . 0 = 0.$$

Như vậy, đại số Boole được kí hiệu như sau,

$\langle B, \overline{}, ., +, 0, 1 \rangle$ trong đó B là một tập thỏa mãn các điều kiện sau,

1. Luật kết hợp (*Associative*)

$$\forall x, y, z \in B: x + (y + z) = (x + y) + z \text{ và } x(yz) = (xy)z.$$

2. Luật giao hoán (*Commutative*)

$$\forall x, y \in B: x + y = y + x \text{ và } x.y = y.x.$$

3. Luật đồng nhất (*Identity*)

$$\forall x \in B: x + 0 = x \text{ và } x.1 = x.$$

4. Luật phân phối (*Distributive*)

$$\forall x, y, z \in B: x.(y + z) = x.y + x.z \text{ và } x + y.z = (x + y).(x + z).$$

5. Luật bù (*Inverse/Complement*)

$$\forall x \in B, \exists \overline{x} \in B: x + \overline{x} = 1 \text{ và } x.\overline{x} = 0.$$

Phần tử $\overline{x}$ là phần tử bù của x .

Suy ra các luật sau,

6. Luật lũy đẳng (*Idempotent*)

$$\forall x \in B: x + x = x \text{ và } x . x = x.$$

7. Luật trội

$$x + 1 = 1 \text{ và } x . 0 = 0.$$

8. Luật hấp thụ (*Absorption*)

$$\forall x, y \in B: x + x.y = x \text{ và } x.(x + y) = x.$$

$$x + \overline{x} . y = x + y \text{ và } x.(\overline{x} + y) = x.y.$$

9. Luật bù kép (*Involution*)

$$\forall x \in B: \overline{\overline{x}} = x.$$

10. Luật De Morgan

$$\forall x, y \in B: \overline{x + y} = \overline{x} . \overline{y} \text{ và } \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}.$$

11. Luật 0 – 1

$$\overline{0} = 1 \text{ và } \overline{1} = 0.$$

4.2. Các khái niệm

Cho $B = \{0, 1\}$. Khi đó,

Biến Boole là biến chỉ nhận các giá trị trong B , tức là nó chỉ nhận các giá trị hoặc 0 hoặc 1.

Tục biến (*Literal*) là một biến hoặc bù của một biến, như $x, \overline{x}, y, \overline{y}, \dots$

Biểu thức Boole. Cho n biến Boole $x_1, x_2, \dots, x_n$. Biểu thức Boole được định nghĩa đệ quy như sau,

a) $x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1$ là các biểu thức Boole.

b) Nếu E_1, E_2 là biểu thức Boole thì $E_1 + E_2; E_1.E_2; \overline{E_1}$ cũng là biểu thức Boole.

Thường kí hiệu $E = E(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Biểu thức $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ là tập tất cả các bộ n giá trị 0 và 1. Một hàm từ B^n tới B được gọi là **hàm Boole bậc n** . Mỗi hàm Boole có thể được biểu diễn bằng một biểu thức.

Hội sơ cấp (Fundamental Product) là một tục biến hoặc tích của hai hoặc nhiều tục biến, trong đó không có tục biến của cùng một biến.

Tuyến chuẩn tắc là một biểu thức Boole gồm một hội sơ cấp hoặc tổng của các hội sơ cấp không chứa trong nhau.

Như vậy, hàm Boole bậc n sẽ có 2^n tiểu hạng n biến và có 2^{2^n} hàm Boole bậc n .

Ví dụ 4.1. Hàm $F(x, y) = x\bar{y}$ từ tập các cặp có thứ tự các biến Boole tới tập $\{0, 1\}$ là một hàm bậc 2 với $F(1, 1) = 0, F(1, 0) = 1, F(0, 1) = 0$ và $F(0, 0) = 0$. Chúng ta biểu diễn các giá trị trong bảng 4.1 bên dưới sau,

Bảng 4.1. Biểu diễn hàm $F(x, y) = x\bar{y}$		
x	y	$F(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Ví dụ 4.2. Tìm các giá trị của hàm Boole được biểu diễn bởi $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$.

Giải. Các giá trị của hàm này được cho trong bảng 4.2 bên dưới sau,

Bảng 4.2. Biểu diễn hàm $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$					
x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Ví dụ 4.3. Cho $F(x, y)$ là hàm Boole. Hãy xác định giá trị của 16 hàm Boole bậc hai khác nhau?

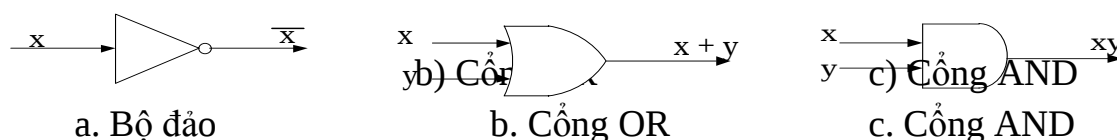
Giải: Một hàm Boole bậc hai là hàm từ tập bốn phần tử trên tập $B = \{0, 1\}$ đến B là tập có hai phần tử. Từ đó chúng ta xác định được 16 hàm Boole bậc hai khác nhau và kí hiệu là $F_1, F_2, \dots, F_{16}$ như bên dưới,

Bảng 4.3. Các hàm Boole $F(x, y)$																	
x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

4.3. Mạch Logic

Đại số Boole được dùng để mô hình hóa sơ đồ các mạch trong các dụng cụ điện tử. Mỗi một đầu vào và mỗi một đầu ra của một dụng cụ như vậy có thể được xem như là một phần tử của tập $\{0, 1\}$. Mỗi một mạch có thể được thiết kế bằng cách dùng các quy tắc của đại số Boole đã được đề cập.

Các phần tử cơ bản của các mạch được gọi là các **cổng**. Mỗi một loại cổng thực hiện một phép toán Boole. Trong mục này chúng ta sẽ tìm hiểu một số cổng và dùng các cổng này chúng ta sẽ áp dụng các quy tắc của đại số Boole để thiết kế các mạch thực hiện các nhiệm vụ khác nhau. Tuy nhiên, các mạch này sẽ cho đầu ra chỉ phụ thuộc vào đầu vào của mạch, hay nói cách khác các mạch này không có khả năng nhớ. Những mạch như vậy được gọi là **mạch tổ hợp**.



Hình 4.1. Các loại cổng cơ bản

Chúng ta sẽ xây dựng các mạch tổ hợp bằng cách dùng ba loại phần tử. Loại thứ nhất là **bộ đảo**, nó chấp nhận giá trị của một biến Boole như đầu vào và tạo phần bù của giá trị đó như đầu ra. Đầu vào của bộ đảo được cho ở vế trái, và đầu ra được cho ở vế phải của bộ đảo.

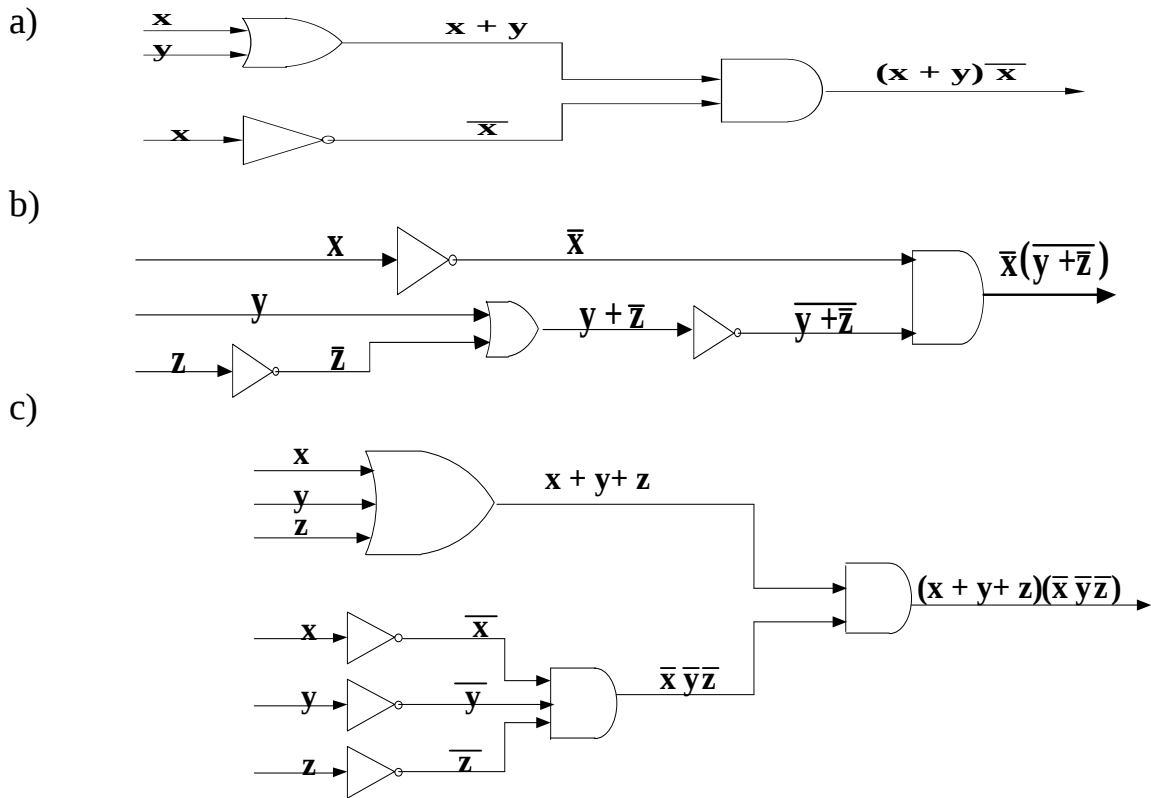
Loại phần tử thứ hai mà chúng ta sẽ dùng là **cổng OR**. Đầu vào cổng này là các giá trị của hai hoặc nhiều hơn hai biến Boole. Đầu ra là tổng Boole của các giá trị đó. Đầu vào của cổng OR được cho ở vế trái, và đầu ra được cho ở vế phải.

Loại phần tử thứ ba mà chúng ta sẽ dùng là **cổng AND**. Đầu vào cổng này là các giá trị của hai hoặc nhiều hơn hai biến Boole. Đầu ra là tích của các giá trị đó. Đầu vào cổng AND được cho ở vế trái, và đầu ra được cho ở vế phải.

Ví dụ 4.4. Dựng các mạch tạo các đầu ra sau,

- a) $x + y \bar{x}$; b) $\bar{x} \overline{y + \bar{z}}$; c) $x + y + z \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

Giải. Các mạch tạo các đầu ra như trên được minh họa bởi hình bên dưới sau,



4.4. Cực tiểu hóa các mạch

4.4.1. Cực tiểu hóa bằng bản đồ Karnaugh

Định nghĩa 4.2. Bản đồ Karnaugh của biểu thức n biến (hàm Boole bậc n) là bảng chữ nhật gồm 2^n ô, mỗi ô là một tiểu hạng sao cho hai ô kề nhau là hai tiểu hạng (hội sơ cấp) kề nhau.

Bản đồ Karnaugh được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ. Phương pháp này được Maurice Karnaugh giới thiệu vào năm 1953. Các bản đồ Karnaugh cho chúng ta một phương pháp trực quan để rút gọn biểu thức của các hàm Boole hai biến hoặc ba biến được minh họa như hình bên dưới,

(a)	1	0
1		
0		

(b)	11	10	00	01
1				
0				

(c)	11	10	00	01
11				
10				
00				
01				

Hình 4.2. Bản đồ Karnaugh cho 2 biến, 3 biến, 4 biến tương ứng (a, b, c)

Tuy nhiên, chúng ta có thể biểu diễn minh họa cụ thể bằng những hàm Boole như hình bên dưới sau.

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

Hình 4.3. Bản đồ Karnaugh 2 biến

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Hình 4.4. Bản đồ Karnaugh 3 biến

Hình 4.5. Bản đồ Karnaugh 4 biến				
	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx	$wxyz$			
$w\bar{x}$			$w\bar{x}yz$	
$\bar{w}x$				
$\bar{w}\bar{x}$				

Tích của mỗi tực biến trong hàm Boole được biểu diễn bởi bản đồ Karnaugh bằng số 1. Mỗi khối toàn số 1 trong bản đồ Karnaugh đó được gọi là tích kéo theo của hàm cực tiểu hóa. Mục tiêu là phải nhận dạng các khối khả dĩ lớn nhất trong bản đồ và phủ tất cả các ô chứa số 1 bằng một số nhỏ nhất các khối mà trước hết là khối lớn nhất. Bằng cách phủ tất cả các số 1 vào bản đồ với các khối tương ứng chính là tích cơ bản của chúng có thể biểu diễn thành tổng các tích như là tổng các tích cơ bản.

Như vậy, để tìm biểu thức tối thiểu của một hàm Boole bậc n dạng tuyến chuẩn tắc đầy đủ bằng bản đồ Karnaugh, thực hiện các bước sau,

Bước 1. Tạo bản đồ Karnaugh gồm 2^n ô. Mỗi tiểu hạng có trong biểu thức được đánh số 1 vào ô tương ứng.

Bước 2. Khoanh tròn các ô số 1 kề nhau cùng nằm chung một hình chữ nhật hoặc một khối lớn nhất dạng 1×1 , 1×2 , 2×1 , 1×4 , 4×1 , 2×2 , 2×4 , 4×2 ,...

Bước 3. Tìm số ít nhất các hình chữ nhật được khoanh tròn phủ được tất cả các ô số 1. Mỗi hình chữ nhật là một hội sơ cấp của biểu thức tối thiểu.

Chú ý. Nếu hàm Boole bậc n không phải dạng tuyến chuẩn tắc đầy đủ ta phải đưa về dạng chuẩn tắc đầy đủ bằng cách thêm vào các số hạng sao cho hàm vẫn không đổi để đảm bảo các số hạng chứa đầy đủ các biến. ($x_i + \bar{x}_i = 1$).

Ví dụ 4.5. Tìm tổng của hai hội sơ cấp kề nhau P_1 , P_2 với,

a) $P_1 = xy\bar{z}$ và $P_2 = x\bar{y}\bar{z}$.

Chúng ta thấy được rằng, P_1 và P_2 chỉ khác nhau một tực biến là y với $\bar{y}$. Khi đó, $P_1 + P_2 = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} = x\bar{z}y + \bar{y} = x\bar{z}1 = x\bar{z}$.

b) $P_1 = \bar{x}yzt$ và $P_2 = \bar{x}y\bar{z}t$.

Chúng ta thấy rằng, P_1 và P_2 chỉ khác nhau một tực biến chính là z và $\bar{z}$. Khi đó, $P_1 + P_2 = \bar{x}yzt + \bar{x}y\bar{z}t = \bar{x}ytz + \bar{z} = \bar{x}yt1 = \bar{x}yt$.

c) $P_1 = \bar{x}yzt$ và $P_2 = xy\bar{z}t$.

Chúng ta thấy được rằng, P_1 và P_2 khác nhau đến hai tực biến. Vì vậy hai tiểu hạng này không thể kể nhau nên chúng ta không thể xác định được tổng của hai hội sơ cấp này.

d) $P_1 = xy\bar{z}$ và $P_2 = xy\bar{z}t$.

Chúng ta nhận thấy được rằng, P_1 và P_2 không kể nhau vì chúng có các biến khác nhau. Do đó, chúng không xuất hiện trong cùng một bản đồ Karnaugh.

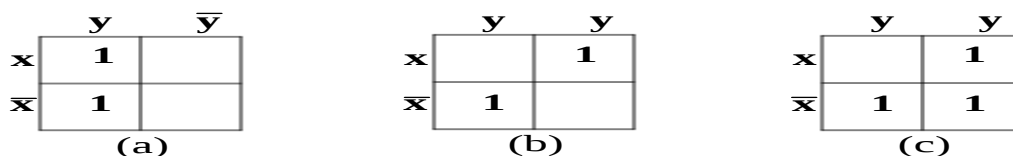
Ví dụ 4.6. Tìm các bản đồ Karnaugh cho,

(a) $xy + \bar{x}y$;

(b) $x\bar{y} + \bar{x}y$;

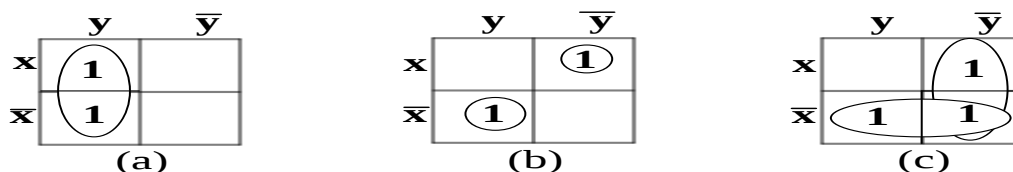
(c) $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$.

Giải: Chúng ta nhận thấy rằng các hàm Boole được cho bởi ví dụ trên đều là những hàm hai biến. Bản đồ Karnaugh sẽ được sử dụng là một hình chữ nhật gồm 4 ô vuông. Chúng ta sẽ ghi số 1 vào ô vuông khi và chỉ khi tiểu hạng được biểu diễn bởi ô đó có mặt trong hàm Boole. Vì vậy, ba bản đồ Karnaugh được cho bởi hình bên dưới sau,



Hình 4.6. Các bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích

Ví dụ 4.7. Rút gọn các khai triển tổng các tích được cho trong ví dụ 4.6?



Hình 4.7. Đơn giản hóa khai triển tổng các tích

Giải: Cực tiểu hóa biểu thức tổng các tích trong hàm Boole được thực hiện bằng cách sử dụng bản đồ Karnaugh cho các khai triển này tương ứng là,

(a) y ;

(b) $x\bar{y} + \bar{x}y$;

(c) $\bar{x} + \bar{y}$.

Ví dụ 4.8. Dùng các bản đồ Karnaugh ba biến để rút gọn các khai triển tổng các tích sau,

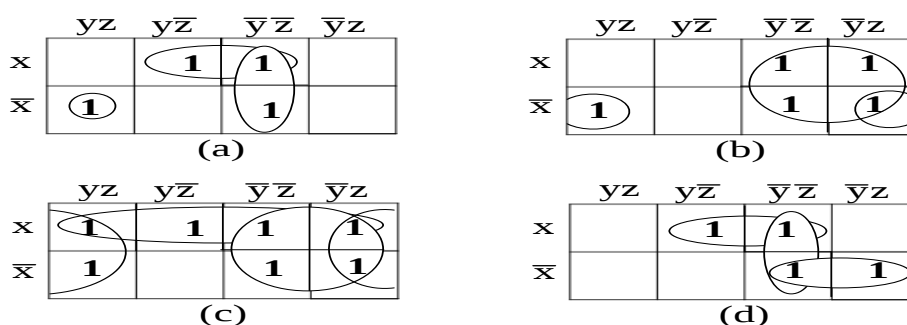
a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

d) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Giải: Bản đồ Karnaugh biểu diễn các hàm Boole ở ví dụ trên là,



Hình 4.8. Đơn giản hàm Boole bằng bản đồ Karnaugh

Như vậy, chúng ta nhóm các khối tương ứng từng biểu thức trong khai triển cực tiểu thành các tổng Boole của các tích Boole là,

$$(a) x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz; \quad (b) \bar{y} + \bar{x}z; \quad (c) x + \bar{y} + z; \quad (d) x\bar{z} + \bar{x}\bar{y}.$$

Tuy nhiên, trong câu (d) chú ý rằng chúng ta có thể nhóm thành ba khối như hình vẽ, tuy nhiên khối thứ hai tương ứng với cột $\bar{y}\bar{z}$ là khối không cốt yếu vì các ô số 1 mà nó phủ lại được hai khối một và khối ba đã phủ. Vì vậy chúng ta chỉ sử dụng hai khối một và khối ba để tìm cực tiểu hóa biểu thức (d).

4.4.2. Phương pháp Quine - Mc Cluskey

Ta thấy rằng các bản đồ Karnaugh có thể được dùng để tạo biểu thức cực tiểu hóa các hàm Boole như tổng của các tích Boole. Tuy nhiên, các bản đồ Karnaugh sẽ rất khó dùng khi số biến lớn hơn bốn. Hơn nữa việc dùng các bản đồ Karnaugh lại dựa trên việc rà soát trực quan để nhận dạng các số hạng cần nhóm lại. Vì những nguyên nhân đó, cần phải có một thủ tục rút gọn những khai triển tổng các tích. Phương pháp Quine - Mc Cluskey là một thủ tục như vậy. Nó có thể được dùng cho các hàm Boole có số biến bất kỳ. Phương pháp này được W.W Quine và E.J. Mc Cluskey phát triển vào những năm 1950. Về cơ bản, phương pháp Quine - Mc Cluskey có hai phần. Phần đầu là tìm biểu thức rút gọn, tức là tìm các hội sơ cấp có thể đưa vào trong biểu thức tối thiểu. Phần thứ hai tìm biểu thức tối thiểu từ các hội sơ cấp có được từ phần đầu bằng cách xác định số hội sơ cấp ít nhất trong biểu thức tối thiểu.

Để tìm biểu thức tối thiểu của một biểu thức Boole dạng tuyến chuẩn tắc đầy đủ n biến gồm k tiểu hạng, thuật toán Quine - Mc Cluskey thực hiện các bước sau,

Bước 1. Tạo bảng ban đầu gồm k xâu bit ứng với k tiểu hạng. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của số bit 1 trong mỗi xâu để tạo thành từng nhóm có số bit 1 bằng nhau.

Bước 2. Lặp cho đến khi không ghép được nữa.

Tạo bảng mới từ bảng hiện thời bằng cách, với mỗi xâu gồm m bit 1, duyệt qua từng xâu gồm $m - 1$ bit 1 nếu cùng vị trí dấu “-” và chỉ khác nhau đúng 1 bit (ghép được) thì đưa xâu này vào bảng mới bằng cách thay đổi bit đó bởi dấu “-” (rút gọn biến này bằng luật đồng nhất); nếu không có xâu nào ghép được thì giữ nguyên xâu này. Nếu xâu đưa vào đã có thì không đưa vào nữa (luật lũy đẳng).

Bước 3. Dựa vào bảng cuối ở bước 3 có được *dạng tuyến chuẩn tắc rút gọn* của biểu thức gồm q hội sơ cấp. Để tìm dạng tuyến chuẩn tắc tối thiểu tạo bảng gồm p dòng hội sơ cấp ở bước 2 và k cột tiểu hạng. Hội sơ cấp i chứa trong tiểu hạng j thì đánh dấu “*” vào ô (i, j) trong bảng.

Tìm số ít nhất các hàng phủ được tất cả các cột (dấu “*”) trong bảng bằng quy tắc sau,

a) Với cột chỉ có duy nhất một dấu “*” thì dòng đó gọi là *dòng cần thiết* và hội sơ cấp đó là cần thiết có trong biểu thức tối thiểu.

b) Tìm các dòng còn lại bằng thuật toán tham lam tức là đưa dòng có nhiều dấu “*” nhất vào biểu thức tối thiểu và đánh dấu xóa các cột có chứa dấu “*” mà nó

phủ được. Lặp cho đến khi tất cả các dấu “*” đều phủ được, hay tất cả các cột được đánh dấu xóa.

Thuật toán này chấp nhận được, tuy nhiên có trường hợp biểu thức nhận được không phải là biểu thức tối thiểu.

Ví dụ 4.9. Cho biểu thức Boole dạng sau,

$$F_{x,y,z} = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Hãy tìm biểu thức cực tiểu của hàm $F(x,y,z)$ trên bằng phương pháp Quine - Mc Cluskey?

Giải: Chúng ta sẽ biểu diễn các tiểu hạng trong hàm $F(x, y, z)$ bằng các xâu bit. Nếu trong tục biến xuất hiện biến thì sẽ tương ứng là bit 1, còn nếu là bù của biến thì sẽ tương ứng là bit 0. Hay cụ thể hơn, bit đầu tiên sẽ là 1 nếu xuất hiện biến x và bit bằng 0 nếu xuất hiện bù của biến x tức là $\bar{x}$.

Sau đó, chúng ta sẽ nhóm các số hạng của bit 1 theo thứ tự giảm dần và được cho ở bảng 4.4 sau,

Bảng 4.4. Nhóm bit 1 của hàm $F_{x,y,z} = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$		
Tiểu hạng	Xâu bit	Số các bit 1
xyz	111	3
$x\bar{y}z$	110	2
$\bar{x}yz$	011	2
$\bar{x}\bar{y}z$	001	1
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	0

Sau khi chúng ta xác định được bảng 4.4, tiếp tục chúng ta sẽ thực hiện hai bước của thuật toán. Các tiểu hạng có thể được tổ hợp lại là những số hạng chỉ khác nhau một tục biến. Do đó, hai số hạng có thể tổ hợp được sẽ chỉ khác nhau một con số 1 trong các xâu bit biểu diễn các số hạng đó. Khi hai tiểu hạng được tổ hợp thành một tích, tích này sẽ chứa hai tục biến và tục biến khuyết sẽ biểu diễn bằng một dấu gạch ngang “-” và được kết quả như sau,

Bảng 4.5. Tổ hợp các tiểu hạng biểu thức							
			Bước 1			Bước 2	
Tiểu hạng		Xâu bit	Tiểu hạng		Xâu bit	Tiểu hạng	Xâu bit
1	xyz	111	(1, 2)	xy	1-1	(1, 2, 3, 4)	z
2	$x\bar{y}z$	101	(1, 3)	yz	-11		
3	$\bar{x}yz$	011	(2,4)	$\bar{y}z$	-01		
4	$\bar{x}\bar{y}z$	001	(3, 4)	$\bar{x}z$	0-1		
5	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	(4, 5)	$\bar{x}\bar{y}$	00-		

Sau bảng 4.5 chúng ta nhận thấy rằng các tiểu hạng chưa được dùng là z và $\bar{x}\bar{y}$. Bước tiếp theo là nhận dạng tập cực tiểu các tích cần thiết để biểu diễn hàm Boole từ những tiểu hạng chưa được dùng trên,

Bảng 4.6. Kết quả cực tiểu hóa hàm $F(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$					
	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
z	*	*	*	*	
$\bar{x}\bar{y}$				*	*

Từ bảng 4.6 ta nhận thấy rằng cả z lẫn $\bar{x}\bar{y}$ đều là cần thiết. Do đó đáp số cuối cùng sẽ là $z + \bar{x}\bar{y}$.

Ví dụ 4.10. Dùng phương pháp Quine - McLuckey để rút gọn biểu thức Boole được cho bởi bảng chân trị sau,

Bảng 4.7. Biểu diễn hàm $F(w, x, y, z)$ bảng chân trị				
w	x	y	z	F(w, x, y, z)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Giải: Dạng tuyến chuẩn tắc đầy đủ của biểu thức Boole là,

$$F(w, x, y, z) = \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xyz + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + wxy\bar{z}$$

Trước hết chúng ta sẽ biểu diễn các tiểu hạng bằng các xâu bit, rồi nhóm các số hạng theo các số 1 trong các xâu bit đó. Điều này được thể hiện ở bảng 4.8 bên dưới sau:

Bảng 4.8. Nhóm bit 1 cực tiểu hóa hàm F w, x, y, z		
Tiểu hạng	Xâu bit	Số các số 1
$\bar{w}xyz$	0111	3
$w\bar{x}yz$	1011	3
$wxy\bar{z}$	1110	3
$\bar{w}\bar{x}yz$	0011	2
$\bar{w}x\bar{y}z$	0101	2
$w\bar{x}y\bar{z}$	1010	2
$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	0001	1

Tiếp theo chúng ta sẽ xác định tất cả các tích Boole được tạo thành bằng cách lấy tổng Boole các tích trong khai triển và được kết quả cho bởi bảng 4.9 bên dưới sau,

Bảng 4.9. Tổ hợp các tiểu hạng biểu thức								
			Bước 1			Bước 2		
Tiểu hạng		Xâu bit	Tiểu hạng		Xâu bit	Tiểu hạng		Xâu bit
1	$\bar{w}xyz$	0111	(1, 4)	$\bar{w}yz$	0-11	(1, 4, 5, 7)	$\bar{w}z$	0--1
2	$w\bar{x}yz$	1011	(1, 5)	$\bar{w}xz$	01-1			
3	$wxy\bar{z}$	1110	(2, 4)	$\bar{x}yz$	-011			
4	$\bar{w}\bar{x}yz$	0011	(2, 6)	$w\bar{x}y$	101-			
5	$\bar{w}x\bar{y}z$	0101	(3, 6)	$wy\bar{z}$	1-10			
6	$w\bar{x}y\bar{z}$	1010	(4, 7)	$\bar{w}\bar{x}z$	00-1			
7	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	0001	(5, 7)	$\bar{w}\bar{y}z$	0-01			

Như vậy, các tích không được dùng có ít biến hơn là $\bar{w}z$, $\bar{x}yz$, $w\bar{x}y$ và $wy\bar{z}$.

Vì vậy, biểu thức tối thiểu của hàm Boole trên được xác định bởi bảng 4.10 bên dưới sau,

Bảng 4.10. Kết quả phương pháp Quine - McClusKey hàm F w, x, y, z							
	$\bar{w}xyz$	$w\bar{x}yz$	$wxy\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}z$	*			*	*	*	*
$\bar{x}yz$		*		*			
$w\bar{x}y$		*				*	
$wy\bar{z}$			*			*	

Như vậy theo phương pháp Quine - McClusKey sẽ có hai biểu thức tối thiểu cần tìm là,

$$\bar{w}z + \bar{x}yz + wy\bar{z}$$

$$\bar{w}z + w\bar{x}y + wy\bar{z}$$

4.5. Bài tập

1. Tìm giá trị của các biểu thức sau,

- a) $1 \cdot \bar{0}$; b) $1 + \bar{1}$; c) $\bar{0} \cdot 0$; d) $\overline{(1 + 0)}$.

2. Tìm các giá trị, nếu có của biến Boole x thỏa mãn các phương trình sau,

- a) $x \cdot 1 = 0$; b) $x + x = 0$; c) $x \cdot 1 = x$; d) $x \cdot \bar{x} = 1$.

3. Dùng bảng chân trị hãy biểu diễn các giá trị của mỗi hàm Boole sau,

- a) $F(x, y, z) = \bar{x}y$; b) $F(x, y, z) = x + yz$;
 c) $F(x, y, z) = x\bar{y} + \overline{(xyz)}$; d) $F(x, y, z) = x(yz + \bar{y}\bar{z})$.

4. Dùng bảng hãy biểu diễn các giá trị của mỗi hàm Boole sau,

- a) $F(x, y, z) = \bar{z}$; b) $F(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{y}x$;
 c) $F(x, y, z) = x\bar{y}z + \overline{(xyz)}$; d) $F(x, y, z) = \bar{y}(xz + \bar{x}\bar{z})$.

5. Tìm giá trị của các biến Boole x và y thỏa mãn phương trình $xy = x + y$?

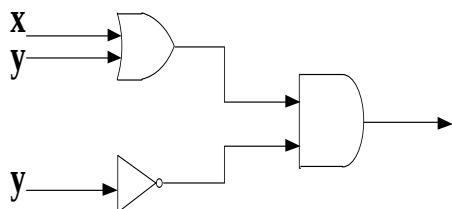
6. Có bao nhiêu hàm Boole bậc bảy khác nhau?

7. Chứng minh luật hấp thụ $x + xy = x$?

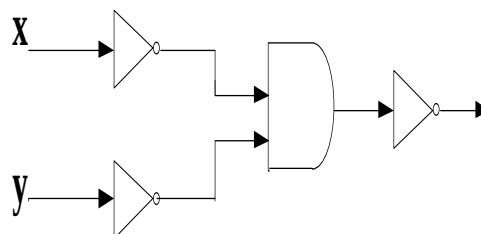
8. Chứng minh rằng $x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$?

9. Tìm các đầu ra của các mạch đã cho sau,

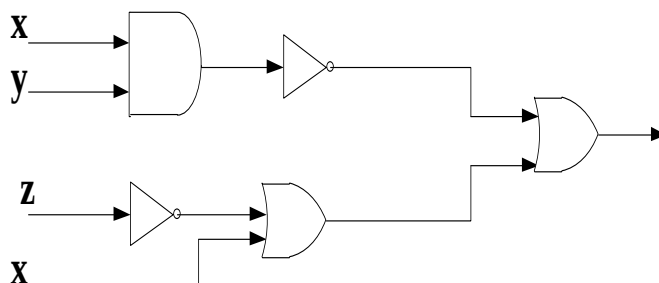
a.



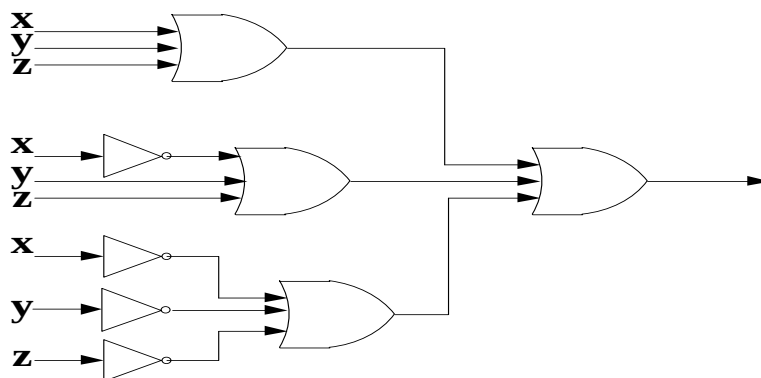
b.



c.



d.



10. Dựng các mạch gồm các bộ đảo, các cổng *AND* và *OR* để tạo các đầu ra sau,

a) $\bar{x} + y$?

b) $\overline{(x + y)} x$?

c) $xyz + \bar{x} \bar{y} \bar{z}$?

d) $\overline{(\bar{x} + z)} + (y + \bar{z})$?

11. Vẽ các bản đồ Karnaugh của những khai triển tổng các tích Boole ba biến sau,

a) $x\bar{y}\bar{z}$?

b) $\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$?

c) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$?

12. Vẽ bản đồ Karnaugh cho hàm $F(x, y, z) = xz + yz + xy\bar{z}$. Dùng bản đồ Karnaugh tìm biểu thức tối thiểu của hàm $F(x, y, z)$ trên?

13. Vẽ bản đồ Karnaugh cho hàm $F(x, y, z) = x\bar{z} + xyz + y\bar{z}$. Dùng bản đồ Karnaugh hãy xác định cực tiểu hóa biểu thức $F(x, y, z)$?

14. Dùng các bản đồ Karnaugh tìm khai triển cực tiểu của các hàm ba biến sau,

a) $F(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$?

b) $F(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$?

c) $F(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$?

d) $F(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$?

15. Dùng bản đồ Karnaugh tìm khai triển cực tiểu hóa của các hàm bốn biến sau,

a) $F(w, x, y, z) = wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$?

b) $F(w, x, y, z) = wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$?

c) $F(w, x, y, z) = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$?

d) $F(w, x, y, z) = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$?

TÀI LIỆU THAM KHẢO*Tài liệu bắt buộc*

1. Giáo trình Toán rời rạc, ThS. Phạm Thị Dung, Trường Đại học Kiến Trúc Đà Nẵng, 2017.
2. Giáo trình Toán rời rạc, PGS.TS. Trần Quốc Chiến, Trường Đại Học Sư Phạm - Đại Học Đà Nẵng, 2004.

Tài liệu tham khảo

3. Giáo trình Toán rời rạc, Th.S. Phan Thanh Tao, Trường Đại Học Bách Khoa - Đại Học Đà Nẵng.
4. Giáo trình Toán rời rạc, Nguyễn Đức Nghĩa - Nguyễn Tô Thành, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 1994.
5. Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học, Kneneth H. Rosen, NXB Giáo dục.
6. Giáo trình Lý Thuyết đồ thị và ứng dụng, PGS.TS Trần Quốc Chiến, Trường Đại Học Sư Phạm - Đại Học Đà Nẵng.